Examens
d' Excellence

Mathématiques
MAROC

Nouvelle édition

Session Ordinaire 2019
Session De Rattrapage 2019
Fiches Mnémotechniques Du Cours

OUARZAZATE 2020

2015
2016
2017
2018
2019

2 Bac SM
MATHS 2020

Badr Eddine EL FATIHI
00212660344136
Professeurbadr.blogspot.com
Ouarzazate 2020

Mathématiques

Résumé de Cours

Énoncés des examens

Mes Propositions de Correction

Méthodes Claires

Détails des détails

Préface 2018

Louanges à ALLAH seul, et bénédiction et Salut soient sur son prophète MOHAMED.

Ce document vient pour combler une des lacunes que connaît la filière SM en matière de rareté des livres traitant les sujets d'examens de Maths en terminale. Je l'ai conçu, et rédigé, volontairement dans le but d'aider les élèves du Maroc et d'ailleurs à concevoir une image approximative sur les attendus du programme.

Avant de partir passer cet examen national, vous êtes censés connaître toutes les techniques, les astuces, les trucs, les méthodes, les algorithmes, les procédures et les réponses typiques à toutes les questions typiques que vous allez apercevoir tout au long de ce document. Là-bas, le jour de l'examen en salle, vous n'avez rien à faire que de choisir la bonne méthode comme réponse à la question adéquate qui convient. Malheureusement, il y en a encore beaucoup d'élèves qui ne croient absolument en cette stratégie « d'apprendre par cœur » les procédés classiques et les méthodes typiques. la vérité c'est que vous aurez 240 minutes comme masse horaire pour répondre à près de 40 questions, soit 6 minutes en chaque question ☹.

En poursuivant mon soutien aux élèves, me voilà prêt à vous proposer ma méthodologie de préparation pour s'entraîner bien, et pour répondre aisément aux questions de l'examen national. J'ai proposé quelques sujets pour la préparation comme plateforme de travail. Et je crois que c'est tant suffisant. Mais si vous en voulez plus, consultez les éditions précédentes. Par la suite, voici quelques conseils à suivre pendant vos révisions, et pour vous aider à aborder sereinement les épreuves écrites de juin 2019, et ainsi mettre toutes les chances de votre côté pour décrocher votre précieux Bac ☺.

Pour réussir cet examen, il faut aimer travailler les maths au premier abord. Et ce n'est pas du tout banal que quelqu'un débute toujours l'année avec motivation. Faire des fiches qui récapitulent l'essentiel du cours et utiliser des moyens mnémotechniques afin d'en faire un vrai capital mémoire.

Savoir bien gérer son temps en se fixant des délais et en s'accordant des pauses. On ne retient bien que ce qu'on aime. Et généralement, On aime bien les matières où on a eu de bonnes notes ☺. Partant de ce principe, j'estime qu'il faut se motiver d'autant plus pour les matières où l'on se sent moins à l'aise (les arithmétiques comme exemple ☹). Il s'agit d'installer un cercle vertueux dès le début de l'année si l'on se plonge dans une matière avec passion, alors on va mieux retenir, mieux restituer et avoir de bons résultats. Ce qui permet d'associer une image positive à l'examen tout entier ☺.

Un bon étudiant est celui qui connaît sa grille d'évaluation et les cadres référentiels des examens. Savoir ce que l'on attend de vous en Maths (connaissances et compétences), vous aidera à voir quoi mettre en avant, à anticiper les questions. Et c'est d'ailleurs mon premier but derrière ces documents.

Dans un examen, il y a une part de stratégie puisqu'il faut convaincre l'examinateur (ou directement le correcteur). Comprendre ce qu'on attend de vous est très primordial, car dans l'examen du baccalauréat vous êtes amenés, sans qu'on le dit institutionnellement, vous êtes censés recracher le cours sous diverses formes : algorithmes, théorèmes, applications, méthodes, procédés etc....

Certains élèves commencent à réviser dés le mois de Mars, alors que d'autres attendent le mois de Mai pour se plonger dans leurs livres en prévision des examens de fin d'année. Mais peu importe la stratégie, il faut savoir que la réussite à ces épreuves ne dépend que de la qualité du travail de révision. La préparation mentale y joue également un grand rôle. Savoir chasser le stress et gérer son temps est aussi important que d'arriver à assimiler le cours des mathématiques tout entier.

Souvent, les sujets des examens, notamment à l'écrit, sont liés de près ou de loin à l'actualité. En plus de vous donner des indications claires sur les éventuels sujets. Travailler les sujets des années précédentes permet d'enrichir vos connaissances, de confirmer que vous êtes curieux et que vous avez déjà une expérience cumulée.

Un examen, c'est comme une épreuve sportive ! si l'on arrive sans énergie, alors on est sûr de rater son départ ou de ne pas arriver jusqu'au bout. Le moral c'est qu'il est important de bien manger de bonnes Msimnates de la chère maman et de bien dormir, notamment dans les derniers jours précédents les épreuves ☺. L'alimentation permet de fournir de l'énergie, le sommeil aussi, en plus de permettre au cerveau de récupérer et d'enregistrer toutes les informations acquises dans la journée. Je vous conseil aussi de s'aérer l'esprit en faisant du sport.

Enfin, il importe d'aborder l'épreuve de façon positive, de se présenter à l'examen prêt à faire de son mieux tout en étant conscient que la partie ne sera pas facile ☹. Il faut savoir que visualiser la réussite peut influencer et programmer le succès dans l'inconscient, autant mettre toutes les chances de son côté ☺. Je souhaite que ce document aide à achever tous vos buts. Louanges à ALLAH seul et bénédiction et salut soient sur son prophète MOHAMED.

Bon courage ☺.

Préface 2020

Ci-après quelques notes, indispensables à lire et à reconnaître, sur la nature de la filière SM. Je les ai proposées pour que vous puissiez se rendre compte de ce qui se passe réellement autour de vous :

Le stress est un mécanisme normal, déclenché par le cerveau pour déclarer un état d'urgence du corps tout entier. C'est-à-dire que vous ne devriez surtout pas être mal à l'aise quand cela se produirait ou quand on aperçoit ce sentiment dans un examen. Le stress vous permettriez de mobiliser toute l'énergie et de la focaliser sur la feuille où les questions auraient été énoncées. C'est un facteur catalyseur comme un chien rageur qui traque un coureur fainéant.

Lisez attentivement chaque question. Souvent, l'idée de la réponse vient immédiatement à travers le travail pénible que vous auriez fait en classe, sur les livres ou encore au cours des heures de soutien scolaire. Je fais d'abord mes esquisses de calcul sur le brouillon ensuite je passe immédiatement pour noter ma réponse sur la copie soigneusement en utilisant éventuellement des phrases courtes pour guider le correcteur.

Parfois il arrive qu'on se plante deux ou trois fois devant une question qu'on a bien compris, mais qu'on n'arrive pas à dénicher la stratégie de réponse qui va avec. Essayez de relier cette question avec celles d'avant. Il faudrait s'interroger à tout moment sur la relation qui pourrait exister entre cette question et l'exercice tout entier.

Dans le cas où l'échec persiste, dépassez cette défaillance en y retournant de temps à autre. Signalons qu'on pourra utiliser le résultat de la question qui a foirée dans d'autres questions qui viendraient au fur et à mesure de l'exercice.

N'ayez pas peur à propos de quelques questions auxquelles vous n'avez pas pu répondre rigoureusement, il se peut que la notation adoptée sur quelques-unes soit de 0,25 ou 0,50. Ça ne mérite pas de gaspiller du temps précieux là-dessus. Ce type de questions ambigües et rhétoriques sont rares dans un examen dans la session ordinaire. Les questions que vous verriez sont littéralement typiques et classiques et admettent une ou deux méthodes de résolution au plus.

Parfois on se rend compte que la réponse retrouvée est insuffisante et ça manque de rigueur et de pertinence. Ne jamais abandonner une tentative de résolution, qui n'a pas abouti, aussi male soit elle. Il se peut que le correcteur prenne ton travail en considération.

Pour le management du temps, je vous propose cet emploi du temps pour bien gérer les quatre heures et pour éviter le gaspillage autour des questions ambigües de type 0,25.

- Structures Algébriques : 40 minutes
- Nombres complexes : 50 minutes
- Analyse réelle : 2 heures
- Arithmétiques (proba) : 30 minutes

Il y aurait toujours des gens fainéants et losers, leur job est de pousser et provoquer les autres à devenir comme eux. Quand ils perdent, ils se mettent à râler et à se plaindre contre tout le monde. Ils se réjouissent en faisant toujours la victime. Pour lui, le pauvre, il est toujours innocent et opprimé. C'est les autres autour de lui qui sont coupables et qui ont eu tord. C'est ce que j'appelle le syndrome de l'échec de la victime innocente. Méfiez-vous !

Sachez que le but derrière le régime de l'école publique était, et resterait toujours, l'acquisition d'une formation solide pour vous faciliter une intégration flexible et rapide dans le tissu économique. Bref, acquérir un job. Autrement-dit on vous dit que l'enseignement public ou privé est la clé à l'intégration économique quelle que soit l'amour que l'on fournit à ce qu'on fait. Mais dire que l'école public contribuerait à la promotion de l'étique, des mœurs et de la moralité publique ; alors là i don't think so ! Ce que j'aperçois est carrément le contraire, parce que la majorité des tumeurs d'attitude et de comportement affectent ceux qui auraient reçu une formation au sein d'une école publique. Ça devient clair et remarquable dans les populations du tiers monde. N'espérez jamais une amélioration dans l'étique et sur les mœurs des individus en franchissant une école public, aussi prestigieuse soit elle, dans les pays en voie de développement.

Quand on performante un exploit ou lorsqu'on aurait un succès, on ne s'attend jamais à ce que les autres soient fiers. Ça marche aussi quand on est dans une compétition face à d'autres concurrents de la même classe et de la même filière. Et c'est tout à fait normal puisqu'on est des humains et la jalousie est un sentiment inné. Donc ce ne serait pas la peine d'attendre des applaudissements de la part de quelqu'un. Comme celles qu'on manifeste à l'égard de ***NADAL*** ou ***FEDERER***.

Je peux même aller très loin en disant que tu pourrais en avoir de l'ironie et de l'harcèlement verbal comme simple feed-back. Prends soin de tes projets personnels et ne surtout pas espérer de la reconnaissance. Un exemple vivant m'a vraiment marqué quant tout le monde se moquait d'un jeune garçon prodigieux et talentueux, originaire de ***TIZNIT*** et qui s'appelle ***Ider MOTIÏ*** ; en disant qu'il se plante en parlant le dialecte marocain ! C'est ridicule parce que tout le monde omettait ses compétences en programmation et son talent linguistique en parlant couramment l'anglais, et on lui avait reproché d'avoir parlé mal une langue qui n'était jamais la sienne. C'est ridicule et insensé, d'ailleurs cette langue, même soutenue, dans le monde technique, est une arnaque technologique. La seule interprétation de l'harcèlement provoqué par ces groupes de losers est une jalousie et méchanceté.

Ider, tu n'aurais pas dû parler une longue, qui n'était jamais la tienne, et faire de l'effort pour satisfaire le besoin d'un roturier. T'aurais dû s'exprimer en langue ***AMAZIGH***, et pour la compréhension je recommande des casques de traduction. ☺

J'estime profondément que vous devriez, peut être, se motiver d'autant plus pour le travail individuel, personnel et autodidacte chez-vous à la maison. Et ce n'est pas de m'arrêter de dire que l'activité mathématique serait d'effectuer des taches de calcul comme on l'entend souvent dans les controverses et les préjugées à l'égard des matheux, en disant ainsi que nous ne serions que des calculettes programmables. Non ! il suffit de penser à l'athlète qui, comme vous le saviez, effectue dans son entraînement des mouvements mécaniques, robotiques, parfois ennuyeux et parfois honteux et ridicules. Il les fait, non pas pour idéaliser ces mouvements et d'en faire l'objectif, ou parce qu'il en aurait besoin pour son concert d'acrobatie, non ! Mais parce que ces mouvements vont l'aider à avoir un physique flexible et compatible avec d'autre contextes et valables à d'autres environnement là où on en aura besoin.

Ainsi, le mathématicien, si l'on peut établir une modélisation, serait un athlète qui s'entraîne avec des exercices et des problèmes pour faire bouger les muscles de la raison, de la logique, de la contradiction, de l'absurde, de l'implication, de l'induction, de la déduction, de la manipulation de lois et de faire communiquer et partager son raisonnement rigoureusement avec autrui.

Les élèves des années précédentes ont cordialement contribué à la détection de quelques fautes, que j'ai reconnu être graves quant-même. Ces étudiants, que je remercie infiniment, ont travaillé beaucoup dans mes livres. Et ce fut vraiment un grand plaisir pour moi d'avoir enseigné implicitement beaucoup d'étudiants partout dans le ***Maroc*** et l'***Algérie***, que je n'aurais même pas l'occasion de les voir tous ensemble assis dans une même salle.

Ils aient détecté ces quelques fautes que j'ai commises inconsciemment et aient pu me contacter pour m'informer volontairement.

La partie majeure des étudiants qui ont pu me contacter via ***WhatsApp*** m'ont communiqué leurs appréciations et leurs points de vue à propos de cette expérience de soutien à travers des examens corrigés des années précédentes que j'ai proposés. Et la majorité d'entre eux auraient pu exprimer leur satisfaction et leur joie en décrivant ma méthode de résolution qui était claire et bien détaillée, parfois simple mais élégante et profonde. Ce serait toujours un plaisir pour moi de lire vos commentaires qui me donneraient encore et toujours le courage et de l'adrénaline pour continuer à mener à bien cette honorable cause.

Parmi les remarques que j'avais reçues le plus souvent sur WhatsApp je cite la nature du contenu des questions qui étaient, comme prévu pour 2019, classiques et typiques. Et pourtant je considère cette composition (2019N) comme l'une des meilleures que j'ai vu jusqu'à maintenant. Je crois que c'est génial d'avoir des questions classiques puisque ce serait en votre faveur. D'ailleurs, ce qui est important ce n'est pas les mathématiques comme matière, mais plutôt d'avoir sélectionné, via les maths, des étudiants qui travaillent et pensent logiquement pour les préparer pour les métiers du monde réel : ingénierie, médecine, architecture, économie, finances, réseaux, systèmes informatiques industrie, bâtiments et traveaux publiques. Je ne sais pas pour vous, mais vous vous rendez compte qu'il n'existeraient jamais des ingénieurs assis dans leurs bureaux et entrain de résoudre des équations ☹. Même, si vous obtiendriez des doctorats en électronique, rassurez-vous vous ne seriez jamais capable de fabriquer une montre. Et si vous arriviez à en manufacturer une, vous devriez sûrement la vendre au kilo puisqu'il existent déjà des compagnies multinationales qui manufacturent des montres dépuis bien longtemps, 100 et 150 ans déjà ☹. Bon courage.

SOMMAIRE

Mathématiques

Résumé De Cours

Structures Algébriques

Analyse Complexe

Arithmétiques dans Z

Calcul de Probabilités

Analyse Réelle

Quelques intégrales indéfinies

Structures Algébriques

1 Loi de composition interne

$$* \text{ est une loi de composition interne dans } E \iff \forall (a,b) \in E^2 \ ; \ a * b \in E$$

Avec E est un ensemble défini implicitement ou explicitement.

2 La Stabilité

$$S \text{ est une partie Stable dans } (E,*) \iff \forall (x,y) \in S^2 \ ; \ x * y \in S$$

Avec $*$ est une loi de composition interne dans E et $S \subseteq E$

3 La Stabilité – Avertissement :

$$\left.\begin{matrix} * \text{ est LCI dans } E \\ S \subseteq E \end{matrix}\right| \not\Rightarrow S \text{ est stable dans } (E,*)$$

4 L'associativité :

$$* \text{ est une loi associative} \iff \left| \begin{matrix} \forall (x,y,z) \in E^3 \\ (x * y) * z = x * (y * z) \end{matrix} \right.$$

Avec $*$ est une loi de composition interne dans E .

5 La commutativité :

$$* \text{ est une loi commutative} \iff \left| \begin{matrix} \forall (x,y,) \in E^2 \\ x * y = y * x \end{matrix} \right.$$

6 L'élément neutre :

$$e \text{ est l'élément neutre dans } (E,*) \iff \left| \begin{matrix} (\exists! \, e \in E), (\forall \, x \in E) \\ e * x = x * e = x \end{matrix} \right.$$

7 L'élément neutre - Avertissement

$$\left.\begin{matrix} S \text{ est stable dans } (E,*) \\ e \text{ est l'élément neutre dans } (E,*) \end{matrix}\right| \not\Rightarrow \left| \begin{matrix} e \text{ est l'élément neutre dans } (S,*) \end{matrix} \right.$$

8 La Symétrie :

$$\left.\begin{matrix} a' = sym(a) \\ \text{dans } (E,*) \end{matrix}\right| \iff a * a' = a' * a = e$$

Avec $*$ est une LCI dans E.
e est l'élément neutre dans $(E,*)$.
L'élément a' est unique dans E.

9 Le symétrique d'un composé :

$$\left| \begin{matrix} \text{oubien} : & sym(a * b) = sym(b) * sym(a) \\ \text{oubien} : & (a * b)' = b' * a' \end{matrix} \right.$$

Avec $*$ est une loi de composition interne associative dans E.
e est l'élément neutre dans $(E,*)$.
a et b sont deux éléments de E.

10 L'élément régulier d'une LCI :

$$\left.\begin{matrix} a \text{ est un élément} \\ \text{régulier dans } (E,*) \end{matrix}\right| \iff \left| \begin{matrix} a * x = a * y & \Rightarrow & x = y \\ x * a = y * a & \Rightarrow & x = y \end{matrix} \right.$$

Quelques soient x et y dans E.
Pour toute LCI $*$ dans E.

11 L'Homomorphisme :

$$\left.\begin{matrix} f \text{ est un homomorphisme} \\ \text{de } (E,*) \text{ vers } (F,\top) \end{matrix}\right| \iff \left| \begin{matrix} \forall (x,y) \in E^2 : \\ f(x * y) = f(x) \top f(y) \end{matrix} \right.$$

12 L'Isomorphisme :

$$\left.\begin{matrix} f \text{ est un isomorphisme} \\ \text{de } (E,*) \text{ vers } (F,\top) \end{matrix}\right| \iff \left| \begin{matrix} f \text{ homomorphisme} \\ f \text{ est une bijection} \end{matrix} \right.$$

13 L'Homomorphisme conserve la stabilité :

$$\left.\begin{array}{c} f : (E,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est homomorphisme} \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(E) \text{ est une partie} \\ \text{stable dans } (F,\top) \end{array}\right.$$

14 L'Homomorphisme conserve l'associativité :

$$\left.\begin{array}{c} f : (E,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est un homomorphisme} \\ * \text{ est associative dans } (E,*) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} T \text{ est associative} \\ \text{dans } (f(E),\top) \end{array}\right.$$

15 L'Homomorphisme conserve la commutativité :

$$\left.\begin{array}{c} f : (E,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est un homomorphisme} \\ * \text{ est commutative dans } (E,*) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} T \text{ commutative} \\ \text{dans } (f(E),\top) \end{array}\right.$$

16 L'Homomorphisme et l'élément neutre :

$$\left.\begin{array}{c} f : (E,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est un homomorphisme} \\ e \text{ est l'EN dans } (E,*) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(e) \text{ est l'EN} \\ \text{dans } (f(E),\top) \end{array}\right.$$

Avec : L'EN = l'élément neutre.

17 L'Homomorphisme et la symétrie :

$$\left.\begin{array}{c} f : (E,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est un homomorphisme} \\ x' = sym(x) \text{ dans } (E,*) \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(x') = sym(f(x)) \\ \text{dans } (f(E),\top) \end{array}\right.$$

18 La structure de groupe :

$$\left.\begin{array}{c} (G,*) \text{ est} \\ \text{un groupe} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} * \text{ est associative dans } G \\ * \text{ admet un EN } e \text{ dans } G \\ (\forall\, a \in (G,*))(\exists!\ sym(a) = a' \in (G,*)) \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{c} (G,*) \text{ est un} \\ \text{groupe abélien} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (G,*) \text{ est un groupe} \\ * \text{ est commutative dans } G \end{array}\right.$$

Groupe abélien = Groupe commutatif

$$\left.\begin{array}{c} (G,*) \text{ est un groupe} \\ a \in E \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} a \text{ est un élément} \\ \text{régulier dans } (E,*) \end{array}\right.$$

19 Le sous-groupe d'un groupe :

$$\left.\begin{array}{c} (H,*) \text{ est un} \\ \text{sous-groupe} \\ \text{du groupe } (G,*) \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} H \subseteq G \ ;\ H \neq \emptyset \\ \forall (x,y) \in H^2 \ ;\ x * sym(y) \in H \end{array}\right.$$

20 L'Homomorphisme conserve la structure de groupe :

$$\left.\begin{array}{c} f : (G,*) \mapsto (F,\top) \\ f \text{ est un homomorphisme} \\ (G,*) \text{ est un groupe} \end{array}\right| \Rightarrow \left| \begin{array}{l} f(G\,;*) = (f(G)\,;\top) \\ \text{est un groupe} \end{array}\right.$$

$*$ associative dans $G \Rightarrow \top$ associative dans $f(G)$

$e = EN(G,*) \Rightarrow f(e) = EN(f(G),\top)$

$x' = sym(x)$ dans $G \Rightarrow f(x') = sym(f(x))$ dans $f(G)$

21 La structure d'Anneau :

$$\left.\begin{array}{c} (A,*,\top) \text{ est} \\ \text{un Anneau} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (A,*) \text{ est un groupe abélien} \\ \top \text{ est associative dans } A \\ \top \text{ est distributive prp à } * \text{ dans } A \end{array}\right.$$

prp = par rapport

$$\left.\begin{array}{c} (A,*,\top) \text{ est} \\ \text{un Anneau} \\ \text{commutatif} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (A,*,\top) \text{ est un anneau} \\ \top \text{ est commuative dans } A \end{array}\right.$$

22 Diviseurs de Zéro dans un anneau

$$\left.\begin{array}{c} a \text{ est un diviseur} \\ \text{de Zéro dans } (A,*,\top) \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (\exists\, b \in A), (b \neq e) \\ a \top b = b \top a = e \end{array}\right.$$

Avec $(A,*,\top)$ est un anneau.
e est l'élément neutre de la loi $*$.
et $a \neq e$.

23 Anneau parfait :

$$\left.\begin{array}{c} (A,*,\top) \text{ est un} \\ \text{Anneau parfait} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} \forall\, (a,b) \in A^2 : \\ a \top b = e \Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{oubien } a = e \\ \text{oubien } b = e \end{array}\right. \end{array}\right.$$

24 La structure de corps :

$$\left.\begin{array}{c} (K,*,\top) \text{ est} \\ \text{un corps} \end{array}\right| \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} (K,*,\top) \text{ est un anneau unitaire} \\ (\forall x \in K^*), (\exists!\, x' = sym_\top(x)) \end{array}\right.$$

Le mot unitaire veut dire que T admet un élément neutre (appelé souvent l'unité) dans K.
Avec e est l'élément neutre de $*$ dans K. et $K^* = k\backslash\{e\}$

25 Caractérisation des corps :

$$\left.\begin{matrix}(K,*,\top)\ \textit{est}\\ \textit{un corps}\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}(K,*)\ \textit{est un groupe abélien}\\ (K^*,\top)\ \textit{est un groupe}\\ \top\ \textit{est distributive prp à} * \textit{dans } K\end{matrix}\right.$$

Abélien signifie commutatif.
e est l'élément neutre de $*$ dans K.
$K^* = K \backslash \{e\}$.

26 Espace vectoriel réel :

$$\left.\begin{matrix}(E,*,\cdot)\ \textit{est un}\\ \textit{espace vectoriel}\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}(E,*)\ \textit{est un groupe abélien}\\ (\alpha*\beta)\cdot x = \alpha\cdot x * \beta\cdot x\\ (\alpha\beta)\cdot x = \alpha\cdot(\beta\cdot x)\\ \alpha\cdot(x*y) = \alpha\cdot x * \alpha\cdot y\\ 1\cdot x = x\end{matrix}\right.$$

Avec α *et* β sont deux éléments de $\mathbb{R}$.
et x *et* y sont deux éléments de E.

27 Famille génératrice :

$$\left.\begin{matrix}\textit{La famille } (x,y)\ \textit{est}\\ \textit{génératrice de } E\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}(\forall\, a \in E), (\exists\, \alpha,\beta \in \mathbb{R})\\ a = \alpha\cdot x + \beta\cdot y\end{matrix}\right.$$

28 Dépendance & indépendance :

$$\textit{La famille } (x,y)\ \textit{est liée} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\exists\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^{2*}\ :\\ \alpha\cdot x + \beta\cdot y = 0\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}\textit{La famille } (x,y)\\ \textit{est libre}\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\forall\,(\alpha,\beta)\in\mathbb{R}^{2*}\ :\\ \alpha\cdot x + \beta\cdot y = 0 \ \Rightarrow \begin{cases}Et\ x = 0\\ Et\ y = 0\end{cases}\end{matrix}\right.$$

29 Caractérisation des SEV :

$$\left.\begin{matrix}F\ \textit{est un sev}\\ \textit{de } (E,+,\cdot)\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}(\forall\,\alpha\in\mathbb{R}), (\forall\, x,y \in F)\ :\\ (\alpha x + y) \in F\end{matrix}\right.$$

sev = sous-espace vectoriel.
avec $(E,+,\cdot)$ est un R-espace vectoriel.
et $F \subseteq E$.

30 Base d'un espace vectoriel :

$$\left.\begin{matrix}\textit{La famille } (x,y)\ \textit{est}\\ \textit{une base de } E\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}(\forall\, m\in\mathbb{R}), (\exists!\ \alpha,\beta\in\mathbb{R})\ :\\ m = \alpha x + \beta y\end{matrix}\right.$$

Avec E est un espace vectoriel.

31 La dimension d'un esp vectoriel :

Le nombre d'éléments d'une base d'un esp vect E s'appele la dimension de E. notée $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$.

32 Espace vectoriel de dim fini E=R² :

$$\left.\begin{matrix}\textit{La famille } (\vec{x},\vec{y})\\ \textit{est libre}\end{matrix}\right| \Leftrightarrow (\vec{x},\vec{y})\ \textit{est une base de } E$$

$$\left.\begin{matrix}\textit{La famille } (\vec{x},\vec{y})\\ \textit{est libre}\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \det(\vec{x},\vec{y}) \neq 0$$

$$\left.\begin{matrix}\textit{La famille } (\vec{x},\vec{y})\\ \textit{est libre}\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \begin{array}{cc}\vec{x} & \vec{y}\\ \multicolumn{2}{c}{\begin{vmatrix}\blacksquare & \blacksquare\\ \blacksquare & \blacksquare\end{vmatrix}}\end{array} \neq 0$$

33 Calcul du Déterminant d'une Matrice:

$$\det(M) = \begin{vmatrix}a & d\\ c & b\end{vmatrix} = ab - cd$$

$$\det(N) = \begin{vmatrix}a & i & g\\ e & b & j\\ k & f & c\end{vmatrix} = a\begin{vmatrix}b & j\\ f & c\end{vmatrix} - e\begin{vmatrix}i & g\\ f & c\end{vmatrix} + k\begin{vmatrix}i & g\\ b & j\end{vmatrix}$$

$$= (abc + efg + ijk) - (gbk + ajf + iec)$$

$$= -i\begin{vmatrix}e & j\\ k & c\end{vmatrix} + b\begin{vmatrix}a & g\\ k & c\end{vmatrix} - f\begin{vmatrix}a & g\\ e & j\end{vmatrix}$$

$$= g\begin{vmatrix}e & d\\ k & f\end{vmatrix} - j\begin{vmatrix}a & i\\ k & f\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}a & i\\ e & b\end{vmatrix}$$

$$= a\begin{vmatrix}b & j\\ f & c\end{vmatrix} - i\begin{vmatrix}e & j\\ k & c\end{vmatrix} + g\begin{vmatrix}e & d\\ k & f\end{vmatrix}$$

$$= -e\begin{vmatrix}i & g\\ f & c\end{vmatrix} + b\begin{vmatrix}a & g\\ k & c\end{vmatrix} - j\begin{vmatrix}a & i\\ k & f\end{vmatrix}$$

$$= k\begin{vmatrix}i & g\\ b & j\end{vmatrix} - f\begin{vmatrix}a & g\\ e & j\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix}a & i\\ e & b\end{vmatrix}$$

$$\textit{Règle des signes} : \begin{vmatrix}+ & - & +\\ - & + & -\\ + & - & +\end{vmatrix}$$

Nombres Complexes

34 Parties réelle et imaginaire :

$$\bar{z} = z \iff z \in \mathbb{R} \iff \mathfrak{Im}(z) = 0$$

$$\bar{z} = -z \iff z \in i\mathbb{R} \iff \mathcal{Re}(z) = 0$$

$$z = z' \iff \begin{vmatrix} \mathcal{Re}(z) = \mathcal{Re}(z') \\ \mathfrak{Im}(z) = \mathfrak{Im}(z') \end{vmatrix}$$

$$\mathcal{Re}(z + \lambda z') = \mathcal{Re}(z) + \lambda\, \mathcal{Re}(z')$$

$$\mathfrak{Im}(z + \lambda z') = \mathfrak{Im}(z) + \lambda\, \mathfrak{Im}(z')$$

Avec λ est un réel.

35 affixe d'un vecteur dans le plan :

$$aff(\overrightarrow{AB}) = aff(B) - aff(A)$$

$$aff(\vec{u} + \lambda\vec{v}) = aff(\vec{u}) + \lambda\, aff(\vec{v})$$

Ça s'écrit aussi sous : $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$.
Et encore : $z_{\vec{u}+\lambda\vec{v}} = z_{\vec{u}} + \lambda\, z_{\vec{v}}$.
Avec λ est un nombre réel.

36 Colinéarité de trois points :

$$A, B \text{ et } C \text{ sont colinéaires} \iff \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \in \mathbb{R}$$

37 Affixe d'un Barycentre :

$$G = Bary\{(A_i\,;\,\alpha_i)\} \iff aff(G) = \frac{\sum_i \alpha_i\, aff(A_i)}{\sum_i \alpha_i}$$

38 Conjugué d'un nombre complexe :

$$z = \mathcal{Re}(z) + i\,\mathfrak{Im}(z) \iff \bar{z} = \mathcal{Re}(z) - i\,\mathfrak{Im}(z)$$

39 Relations de conjugaison :

$$z \times \bar{z} = \left(\mathcal{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathfrak{Im}(z)\right)^2 \in \mathbb{R}^+$$

$$z + \bar{z} = 2\,\mathcal{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i\,\mathfrak{Im}(z)$$

40 Distribuer la conjugaison :

$$\overline{z + \lambda z'} = \bar{z} + \lambda \overline{z'}$$

$$\overline{z \times z'} = \bar{z} \times \overline{z'}$$

$$\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\overline{z'}} \;;\; z' \neq 0$$

$$P(\alpha) = 0 \iff P(\bar{\alpha}) = 0$$

Avec P est un polynôme à coefficients réels.

41 Module d'un nombre complexe :

$$|z| = \sqrt{z \times \bar{z}} = \sqrt{\left(\mathcal{Re}(z)\right)^2 + \left(\mathfrak{Im}(z)\right)^2}$$

$$AB = \|\overrightarrow{AB}\| = |z_B - z_A|$$

$$|\mathfrak{Im}(z)| \leq |z| \quad et \quad |\mathcal{Re}(z)| \leq |z|$$

$$|z \times z'| = |z| \times |z'|$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \;;\; z' \neq 0$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

42 Argument d'un nombre complexe :

$$arg(-z) \equiv \pi + arg(z)\ [2\pi]$$

$$arg(\bar{z}) \equiv -arg[z]\ [2\pi]$$

$$arg(z) \equiv 0\ [\pi] \iff z \in \mathbb{R}$$

$$arg(z) \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \iff z \in i\mathbb{R}$$

$$arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -arg(z)\ [2\pi]$$

$$arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv arg(z) - arg(z')\ [2\pi]$$

$$arg(z^n) \equiv n \cdot arg(z)\ [2\pi] \;;\; n \in \mathbb{N}$$

$$\overline{(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})} \equiv arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)\ [2\pi] \;;\; \begin{vmatrix} A \neq B \\ C \neq D \end{vmatrix}$$

$$\overline{(\vec{u}, \vec{v})} \equiv arg\left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right)\ [2\pi] \;;\; \begin{vmatrix} \vec{u} \neq \vec{0} \\ \vec{v} \neq \vec{0} \end{vmatrix}$$

43 Forme trigonométrique - exponentielle :

$$z = |z| \cdot (\cos(\theta) + i\sin(\theta)) = |z| \cdot e^{i\theta}$$

$$-e^{i\theta} = e^{i(\theta+\pi)}$$

$$(r\,e^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

Avec : $arg(z) \equiv \theta[2\pi]$ et $z \in \mathbb{C}^*$

$$z = z' \iff \left|\begin{array}{l} |z| = |z'| \\ arg(z) \equiv arg(z')\ [2\pi] \end{array}\right.$$

44 Colinéarité de deux vecteurs :

$$\left.\begin{array}{c}\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ sont} \\ \text{colinéaires}\end{array}\right| \iff \left(\frac{z_{\vec{v}}}{z_{\vec{u}}}\right) \in \mathbb{R}$$

Avec $\vec{u} \neq \vec{0}$ et $\vec{v} \neq \vec{0}$.

45 Parallélisme :

$$(AB) \parallel (CD) \iff \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \in \mathbb{R}$$

Avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

46 Perpendicularité :

$$(AB) \perp (CD) \iff \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \in i\mathbb{R}$$

Avec $A \neq B$ et $C \neq D$.

47 Points cocycliques :

$$\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) \times \left(\frac{z_B - z_D}{z_C - z_D}\right) \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} \text{oubien } A, B, C, D \text{ colinéaires} \\ \text{oubien } A, B, C, D \text{ cocycliques} \end{cases}$$

Avec A,B,C et D sont différents 2à2.

48 Formules d'Euler :

$$\cos(x) = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin(x) = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

$$e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

49 Racines nièmes d'un nombre complexe :

$$z^n = a = |a|\,e^{i\theta} \iff z \in \left\{ \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)} \ ;\ \left| {}_{0\leq k\leq n-1}^{k\in\mathbb{N}} \right. \right\}$$

On dit que z est une racine nième du nombre complexe a.

50 Zéros d'un polynôme :

$$\left.\begin{array}{c} z_1 \text{ et } z_2 \text{ sont les zéros} \\ \text{du polynôme } az^2 + bz + c = 0 \end{array}\right| \iff \left| \begin{array}{l} z_1 + z_2 = \boxed{\frac{-b}{a}} \\ z_1 \times z_2 = \boxed{\frac{c}{a}} \end{array}\right.$$

Avec a,b,c sont des nombres complexes.

51 Translation :

$$T_{\vec{v}}(M) = M' \iff z_{M'} = z_M + z_{\vec{v}}$$

52 Homothétie :

$$H_{(\Omega,k)}(M) = M' \iff (z_{M'} - z_\Omega) = k(z_M - z_\Omega)$$

53 Rotation :

$$R_{(\Omega,\theta)}(M) = M' \iff (z_{M'} - z_\Omega) = e^{i\theta}(z_M - z_\Omega)$$

54 La transformation φ(z) = az + b :

$$a = 1 \implies \varphi \equiv T_{\vec{u}(b)}$$

$$a \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\} \implies \varphi \equiv H_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)\ ;\ a\right)}$$

$$a = e^{i\theta} \implies \varphi \equiv R_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right)\ ;\ \theta\right)}$$

$$a = re^{i\theta} \implies \varphi \equiv R \circ H = H \circ R \ ; \ \left| \begin{array}{l} R \equiv R_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right);\theta\right)} \\ H \equiv H_{\left(\Omega\left(\frac{b}{1-a}\right);r\right)} \end{array}\right.$$

Arithmétiques Dans Z

55 PGCD & PPCM

$$\boxed{d = a \wedge b} \iff \left| \begin{array}{l} \boxed{d \ divise \ a} \ ; \ \boxed{d \ divise \ b} \\ \left.\begin{array}{l} d' \ divise \ a \\ d' \ divise \ b \end{array}\right\| \Rightarrow \boxed{d' \leq d} \end{array} \right.$$

$$\boxed{m = a \vee b} \iff \left| \begin{array}{l} \boxed{a \ divise \ m} \ ; \ \boxed{b \ divise \ m} \\ \left.\begin{array}{l} a \ divise \ m' \\ b \ divise \ m' \end{array}\right\| \Rightarrow \boxed{m' \geq m} \end{array} \right.$$

$$(ac) \wedge (bc) = |c| \cdot (a \wedge b)$$

$$(ac) \vee (bc) = |c| \cdot (a \vee b)$$

$$(a \wedge b) \cdot (a \vee b) = |ab|$$

$$(a \wedge b)^n = a^n \wedge b^n$$

Avec a, b et c sont des éléments de $\mathbb{Z}$.
et n est un élément de $\mathbb{N}^*$.

56 Réduction de a ∧ b = d :

$$d = a \wedge b \iff \left| \begin{array}{l} \exists \, (\alpha, \beta) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ \left| \begin{array}{l} et \ \ a = \alpha d \\ et \ \ b = \beta d \end{array} \right. \\ avec \ \ \alpha \wedge \beta = 1 \end{array} \right.$$

Avec a et b sont deux éléments de $\mathbb{Z}^*$.

57 Algorithme d'Euclide :

$$\begin{array}{l|l} a & b \\ c & d \end{array} \Rightarrow \boxed{a \wedge b = b \wedge c}$$

Avec a, b, c et d sont des éléments de $\mathbb{Z}$. Et $b \neq 0$.

58 PGCD & PPCM

$$d = a \wedge b \Rightarrow \exists \, (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ d = au + bv$$

Avec a et b appartiennent à $\mathbb{Z}$.

59 Théorème de Bezout :

$$a \wedge b = 1 \iff \exists \, (u, v) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ au + bv = 1$$

Avec a et b appartiennent à $\mathbb{Z}^*$.

60 Théorème de Gauss :

$$\left. \begin{array}{r} a \ divise \ bc \\ a \wedge c = 1 \end{array} \right| \Rightarrow a \ divise \ b$$

Avec a, b et c sont des éléments de $\mathbb{Z}^*$.

61 Le produit diviseur :

$$\left. \begin{array}{r} a \ divise \ c \\ b \ divise \ c \\ a \wedge b = 1 \end{array} \right| \Rightarrow ab \ divise \ c$$

62 Nombres premiers entre eux :

$$\left. \begin{array}{r} a \wedge b = 1 \\ a \wedge c = 1 \end{array} \right| \iff a \wedge bc = 1$$

$$a \wedge b = 1 \iff a^m \wedge b^n = 1$$

Avec a, b et c sont dans $\mathbb{Z}^*$. Et m et n sont dans $\mathbb{N}^*$.

63 L'équation ax + by = c :

$$\left. \begin{array}{r} ax + by = c \quad est \\ solvable \ dans \ \mathbb{Z}^2 \end{array} \right| \iff (a \wedge b) \ divise \ c$$

Avec a, b et c sont dans $\mathbb{Z}^*$.

64 Division Euclidienne :

$$\left. \begin{array}{l} a \in \mathbb{Z} \\ b \in \mathbb{Z}^* \end{array} \right| \Rightarrow \exists \, (r, q) \in \mathbb{Z}^2 \ ; \ \begin{cases} a = qb + r \\ 0 \leq r < b \end{cases}$$

65 La relation modulo (≡) :

$$a \equiv b \, [n] \iff n \ divise \ (a - b)$$

Avec a, b deux entiers relatifs .

66 modulo est une relation d'équivalence :

$$\begin{cases} a \equiv a\,[n] \quad ; \quad \forall\, a \,\epsilon\, \mathbb{Z} \\ a \equiv b\,[n] \quad \Leftrightarrow \quad b \equiv a\,[n] \\ \left.\begin{matrix} a \equiv b\,[n] \\ b \equiv c\,[n] \end{matrix}\right| \quad \Rightarrow \quad a \equiv c\,[n] \end{cases}$$

Avec a, b deux relatifs et n un entier naturel non nul.

67 Division Euclidienne vs modulo :

$a \equiv b\,[n] \quad \Leftrightarrow \quad$ | *a et b ont le même reste quand on divise a et b sur le nbr n*

Avec a, b et n sont des entiers naturels non- nuls.

68 La relation modulo est compatible avec l'addition et la multiplication

$$\left.\begin{matrix} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{matrix}\right| \quad \Rightarrow \quad ac \equiv bd\,[n]$$

$$a \equiv b\,[n] \quad \Rightarrow \quad a^k \equiv b^k\,[n]$$

$$\left.\begin{matrix} a \equiv b\,[n] \\ c \equiv d\,[n] \end{matrix}\right| \quad \Rightarrow \quad (a+c) \equiv (b+d)\,[n]$$

$$a \equiv b\,[n] \quad \Rightarrow \quad ka \equiv kb\,[n]$$

Avec a, b, d et d sont dans $\mathbb{Z}$.
Et $n \,\epsilon\, \mathbb{N}^*$; $k \,\epsilon\, \mathbb{N}$.

69 Réduire une égalité modulo n :

$$ac \equiv bc\,[n] \quad \Leftrightarrow \quad a \equiv b\left[\frac{n}{c \wedge n}\right]$$

Avec a, b et c sont dans $\mathbb{Z}^*$. Et $n \,\epsilon\, \mathbb{N}^*$.

70 Réduire une égalité modulo :

- $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{\overline{0}\,;\,\overline{1}\,;\,\overline{2}\,;\,\cdots;\,\overline{(n-1)}\}$
- $\overline{r} = \{x \,\epsilon\, \mathbb{Z} \;;\; x \equiv r\,[n]\}$

Avec : $n \,\epsilon\, \mathbb{N}^*$; $r \,\epsilon\, \mathbb{N}$; $0 \leq r \leq n-1$.

- $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$
- $\overline{x} \times \overline{y} = \overline{x \times y}$
- $\overline{n} = \overline{0}$
- $-\overline{x} = \overline{0-x} = \overline{n-x}$

Avec : $x\,, y \,\epsilon\, \mathbb{Z}$.

71 La relation modulo dans Z/nZ :

$$a \equiv b\,[n] \quad \Leftrightarrow \quad \overline{a} = \overline{b}$$

Avec : $n\,, a\,, b \,\epsilon\, \mathbb{N}^*$.

72 Certificat de primalité :

n est un nombre premier | $\Leftrightarrow$ | *Tous les nombres premiers dont le carré est inférieur à n ne divisent pas n*

Avec : $n \,\epsilon\, \mathbb{N}^*$.

73 Nombres premiers entre eux dans P :

$$\left.\begin{matrix} (p,q) \,\epsilon\, \mathbb{P}^2 \\ p \neq q \end{matrix}\right| \quad \Rightarrow \quad p \wedge q = 1$$

74 Le premier qui divise un produit :

p est premier / *p divise ab* | $\Rightarrow$ | *oubien p divise a* / *oubien p divise b*

Avec a et b sont deux entiers relatifs non nuls.

75 Théorème de Fermat (Forme Générale) :

$$\left.\begin{matrix} p \text{ est premier} \\ a \,\epsilon\, \mathbb{Z} \end{matrix}\right| \quad \Rightarrow \quad a^p \equiv a\,[p]$$

76 Théorème de Fermat (Forme Réduite) :

$$\left.\begin{matrix} p \text{ est premier} \\ a \wedge p = 1 \end{matrix}\right| \quad \Rightarrow \quad a^{p-1} \equiv 1\,[p]$$

77 Décomposition en produit de facteurs premiers :

$$a \,\epsilon\, \mathbb{N} \quad \Rightarrow \quad \left|\begin{matrix} \exists!\; (p_1, \cdots, p_k) \,\epsilon\, \mathbb{P}^k \\ \exists!\; (\alpha_1, \cdots, \alpha_k) \,\epsilon\, \mathbb{N}^k \\ a = {p_1}^{\alpha_1} \times \cdots \times {p_k}^{\alpha_k} \end{matrix}\right.$$

2	3	5	7	11	13
17	19	23	29	31	37
41	43	47	53	59	61
67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113

78 PGCD & PPCM :

- $(p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}) \wedge (p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}) = (p_1^{\gamma_1} \times \cdots \times p_k^{\gamma_k})$
- $(p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k}) \vee (p_1^{\beta_1} \times \cdots \times p_k^{\beta_k}) = (p_1^{\sigma_1} \times \cdots \times p_k^{\sigma_k})$

$$\text{Avec} \quad : \quad \left| \begin{array}{l} \gamma_i = inf(\alpha_i \, ; \, \beta_i) \\ \sigma_i = sup(\alpha_i \, ; \, \beta_i) \\ 1 \leq i \leq k \end{array} \right.$$

79 Nombres de diviseurs d'un entier :

l'entier naturel $a = p_1^{\alpha_1} \times \cdots \times p_k^{\alpha_n}$ *admet exactement* $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\cdots(1+\alpha_n)$ *diviseurs positifs dont on trouve les nombres* 1 *et* a

80 L'équation ax = b [n] dans Z :

$$\left. \begin{array}{r} ax \equiv b\,[n] \text{ est} \\ \text{solvable dans } \mathbb{Z} \end{array} \right| \quad \Leftrightarrow \quad (a \wedge n) \text{ divise } b$$

Avec $a, b \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$

et $S = \left\{ x_0 + \left(\frac{n}{a \wedge n}\right) k \ ; \ k \in \mathbb{Z} \right\}$.

x_0 est une solution particulière de l'équation .

81 Généralisation du Théo de Gauss :

$$\left. \begin{array}{r} a \wedge bc = d \\ a \wedge b = 1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad a \wedge c = d$$

Avec : $a, b, c \in \mathbb{Z}^*$.

$$\left. \begin{array}{r} a \wedge b = d \\ c \text{ divise } b \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad a \wedge c = d$$

82 Produit d'entiers consécutifs :

Le produit de k nombres entiers naturels consécutifs est toujours divisible par les nombres $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \cdots \cdots, k$.

Avec : $a, b \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

83 La division au carré :

$$a^2 \text{ divise } b^2 \quad \Leftrightarrow \quad a \text{ divise } b$$

Avec a et b sont deux entiers relatifs.

84 diviser le diviseur :

$$\left. \begin{array}{l} d \text{ divise } a \\ d \text{ divise } b \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad d \text{ divise } (a \wedge b)$$

Avec a et b sont deux entiers relatifs.

84 Le produit exponentiel :

$$\left. \begin{array}{r} ab = c^n \\ a \wedge b = 1 \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \exists\, (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2 \ ; \ \left| \begin{array}{l} a = \alpha^n \\ b = \beta^n \end{array} \right.$$

Avec a, b et n sont des entiers naturels. $n \neq 0$

Calcul De Probabilités

85 Hypothèse d'équiprobabilité :

$$\begin{array}{r|l} L'hypothèse & \\ d'équiprobabilité & \Leftrightarrow \ \forall\,(1 \le i \le n) \ \ ; \ p(\omega_i) = cte \\ est\ vérifiée & \end{array}$$

Avec $\Omega = \{\omega_1, \cdots, \omega_n\}$ est l'univers de toutes les éventualités possibles. Les expressions qui montrent que l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée sont souvent : dé non truqué, boules similaires, identiques, boules indiscernables au toucher.

86 Probabilité d'un événement :

$$p(A) = \frac{card(A)}{card(\Omega)} = \frac{nombre\ d'issues\ vérifiant\ A}{nombre\ total\ de\ possibilités}$$

Avec : A est un événement dans une expérience aléatoire et Ω est l'univers de toutes les éventualités possible. Et l'hypothèse d'équiprobabilité est vérifiée.

87 Dénombrer le card(Ω) :

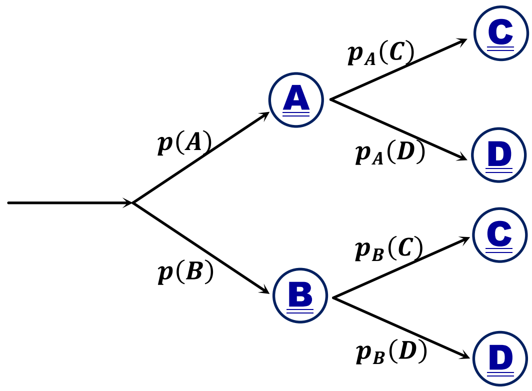
$$\begin{array}{r|l} Tirage\ au\ hasard\ spontané & \\ de\ k\ boules\ parmi\ n\ autres & \Rightarrow \ card(\Omega) = C_n^k \\ toutes\ identiques & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} Tirage\ au\ hasard\ successif & \\ \underline{sans}\ remise\ de\ k\ boules\ parmi & \Rightarrow \ card(\Omega) = A_n^k \\ n\ autres\ stoutes\ identiques & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} Tirage\ au\ hasard\ successif & \\ \underline{avec}\ remise\ de\ k\ boules\ parmi & \Rightarrow \ card(\Omega) = n^k \\ n\ autres\ toutes\ identiques & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} Le\ nombre\ total & \\ de\ combinaisons\ possibles & \Rightarrow \ card(\Omega) = n! \\ de\ n\ éléments. & \end{array}$$

88 Probabilités composés :



- $p(A \cap C) = p(A) \times p_A(C)$
- $p(A \cap D) = p(A) \times p_A(D)$
- $p(B \cap C) = p(B) \times p_B(C)$
- $p(B \cap D) = p(B) \times p_B(D)$

- $p(C) = p(A \cap C) + p(B \cap C)$
- $p(D) = p(A \cap D) + p(B \cap D)$

- $p_C(A) = \dfrac{p(A)}{p(C)} \times p_A(C)$
- $p_D(A) = \dfrac{p(A)}{p(D)} \times p_A(D)$
- $p_C(B) = \dfrac{p(B)}{p(C)} \times p_B(C)$
- $p_D(B) = \dfrac{p(B)}{p(D)} \times p_B(D)$

89 Répétition d'un événement :

Quand on répète indépendamment une expérience aléatoire n fois, Alors la probabilité de vérification d'un événement k fois est donnée par la formule :

$$p_k = C_n^k \times p^k \times (1 - p)^{n-k}$$

Avec : $p = p(A)$ avant de répéter l'expérience n fois.

90 Variable aléatoire :

$$\text{Toute application} \quad \begin{array}{rcl} X : \Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \omega_i & \longmapsto & X(\omega_i) = x_i \end{array}$$

est appelée variable aléatoire

Avec Ω est l'univers de toutes les éventualités possibles dans une expérience aléatoire $X(\Omega) = \{x_1, \cdots, x_n\}$.

91 Loi de probabilité :

$$L'\text{application} \quad \begin{array}{rcl} P_X : X(\Omega) & \longmapsto & [0,1] \\ x_i & \longmapsto & P_X(x_i) = p[X = x_i] \end{array}$$

s'appelle la loi de probabilité de la variable X.

92 Espérance Mathématique :

l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est le nombre E(X) défini ainsi :

$$\bar{X} = E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \cdot x_i$$

$\bar{X}$ représente La valeur moyenne de X.

$$\text{soit la variable aléatoire} \quad \begin{array}{rcl} X : \Omega & \longmapsto & \mathbb{R} \\ \omega_i & \longmapsto & X(\omega_i) = x_i \end{array}$$

$$\text{et la loi de proba} \quad \begin{array}{rcl} p_X : X(\Omega) & \longmapsto & [0,1] \\ x_i & \longmapsto & p_X(x_i) = p[X = x_i] \end{array}$$

93 Variance & Covariance :

La variance de la variable aléatoire X est le nombre positif V(X) défini ainsi :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} p_i \cdot (x_i - \bar{X})^2 = E(X^2) - \big(E(X)\big)^2$$

La covariance de la variable aléatoire X est :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$V(X)$ mesure le rapprochement ou l'éloignement des valeurs de X autour de la valeur moyenne $\bar{X}$.

94 Fonction de répartition :

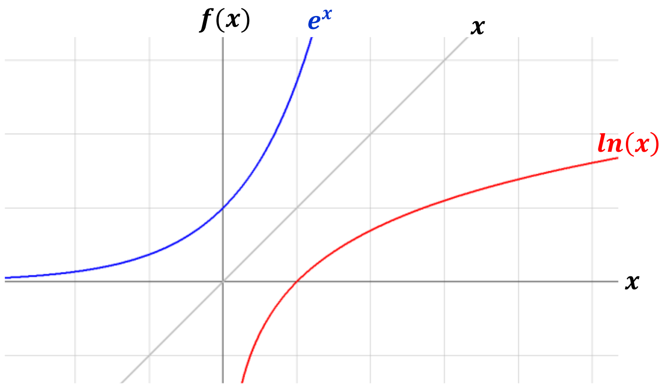
$$L'\text{application} \quad \begin{array}{rcl} F : \mathbb{R} & \longmapsto & [0,1] \\ x & \longmapsto & p_X(X < x) \end{array}$$

s'appelle la fonction de répartition de la var X.

Avec X est une variable aléatoire défini sur un espace probabilisé (Ω, P_X).

Analyse réelle

95 L'exponentielle & Le logarithme

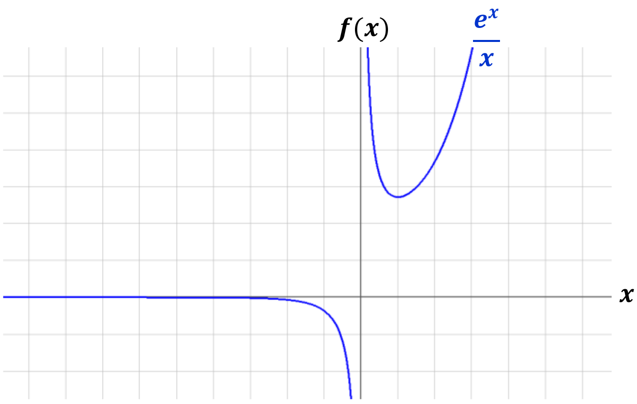


$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}}} e^x = x_0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} ln(x) = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} ln(x) = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}_+^*}} ln(x) = ln(x_0)$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

96 La fonction exp(x)/x :

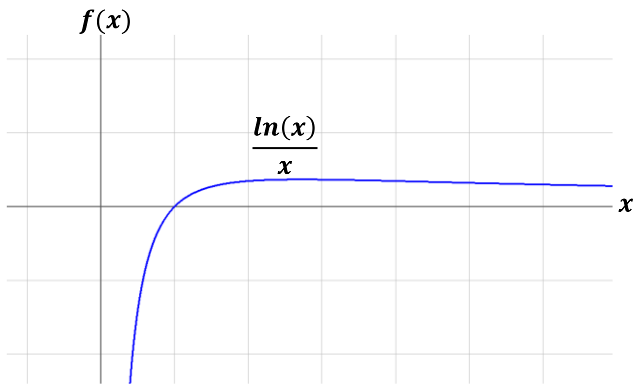


$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{e^x}{x} = 0^-$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}^*}} \frac{e^x}{x} = \frac{e^{x_0}}{x_0}$

$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

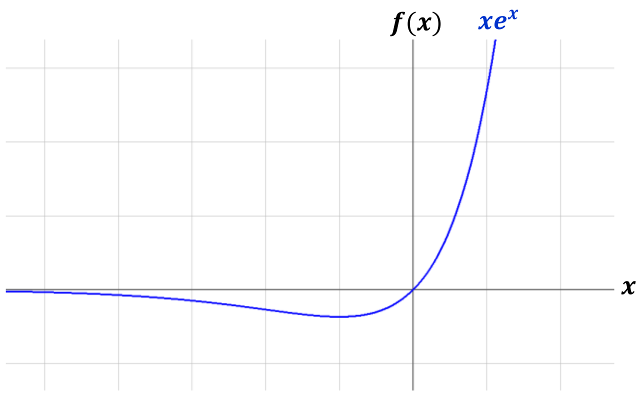
97 La fonction ln(x)/x :



$\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{ln(x)}{x} = -\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{ln(x)}{x} = 0^+$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}_+^*}} \frac{ln(x)}{x} = \frac{ln(x_0)}{x_0}$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

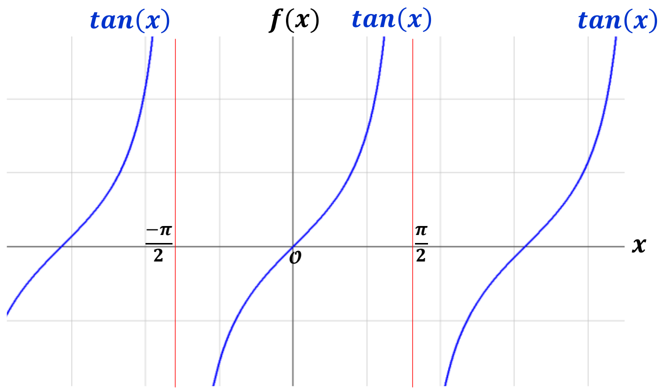
98 La fonction xexp(x) :



$\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0^-$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^x = +\infty$ $\quad$ $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x_0\in\mathbb{R}}} xe^x = x_0e^{x_0}$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

99 La fonction tan(x) :

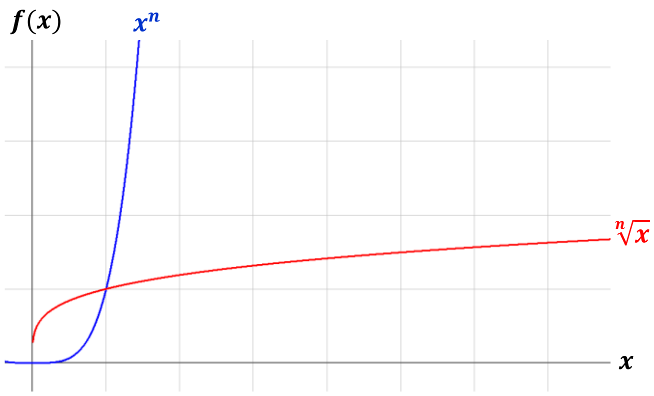


$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tan(x) = \lim_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^-} tan(x) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tan(x) = \lim_{x\to\left(\frac{-\pi}{2}\right)^+} tan(x) = -\infty}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

100 La fonction x^n :

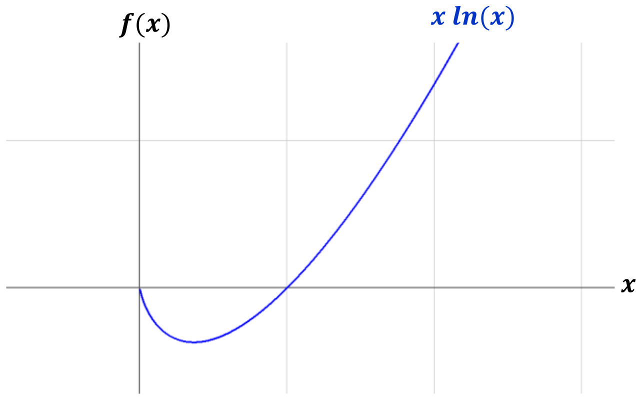


$$\boxed{\lim_{\substack{x\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} x^n = +\infty} \quad \boxed{\lim_{\substack{x\to+\infty \\ n\in\mathbb{N}}} \sqrt[n]{x} = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \alpha>0}} n^\alpha = +\infty} \quad \boxed{\lim_{\substack{n\to+\infty \\ \alpha<0}} n^\alpha = 0}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

101 La fonction xln(x) :

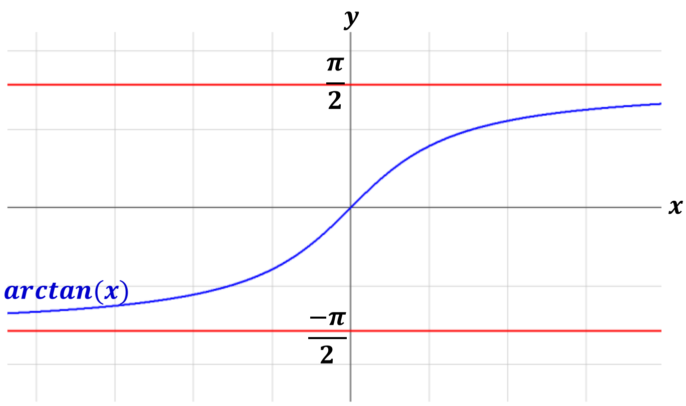


$$\boxed{\lim_{x\to0^+} x\,ln(x) = 0} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} x\,ln(x) = +\infty}$$

$$\boxed{\lim_{\substack{x\to x_0 \\ x_0\in\mathbb{R}_+^*}} x\,ln(x) = x_0\,ln(x_0)}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

102 La fonction arctan(x) :



$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} arctan(x) = \frac{\pi}{2}} \quad \boxed{\lim_{x\to-\infty} arctan(x) = \frac{-\pi}{2}}$$

$$\boxed{(\forall\, x\in\mathbb{R}) \quad ; \quad (arctan\, x)' = \frac{1}{1+x^2}}$$

N'apprenez surtout pas ces limites par cœur.
La mémorisation de l'allure de la courbe suffit pour en tirer les limites que vous voulez ☺

103 Formes indéterminées :

$\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$

1^{∞} ; ∞^{0} ; 0^{0}

104 Règle de l'Hôpital :

$$\textit{La forme } \boxed{\frac{0}{0}} \Rightarrow \lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to c} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \cdots$$

Les autres formes valables sont : $\boxed{\frac{\infty}{\infty}}$; $\boxed{0 \cdot \infty}$; $\boxed{+\infty - \infty}$

Les formes non-valables sont : $\boxed{0^0}$; $\boxed{\infty^0}$; $\boxed{1^{\infty}}$

105 Existence d'une primitive :

f *continue sur* I $\Rightarrow$ f *admet des primitives sur* I

106 Axe de Symétrie :

(C) *est symétrique par rapport à* $(\Delta) : x = a$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x \in D_f : (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = f(x) \end{cases}$

107 Centre de Symétrie :

(C) *est symétrique par rapport à* $\Omega(a, b)$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x \in D_f : (2a - x) \in D_f \\ f(2a - x) = 2b - f(x) \end{cases}$

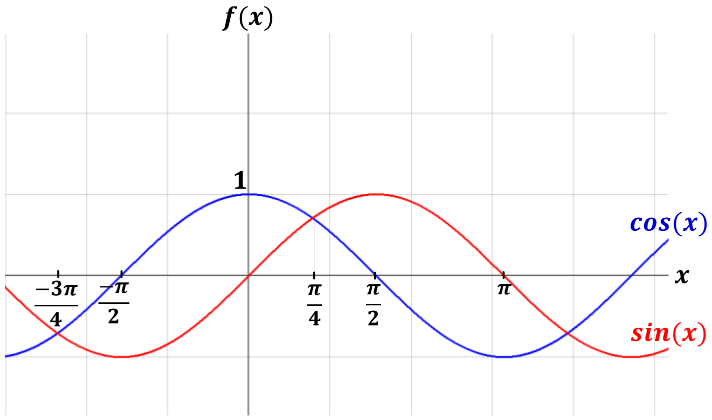
108 Fonction périodique :

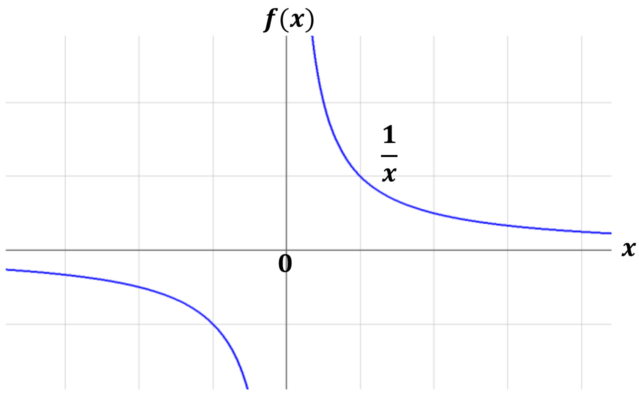
f *est* $T -$ *périodique* $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} \forall x \in D_f : \begin{cases} (x + T) \in D_f \\ (x - T) \in D_f \end{cases} \\ f(x + T) = f(x - T) = f(x) \end{cases}$

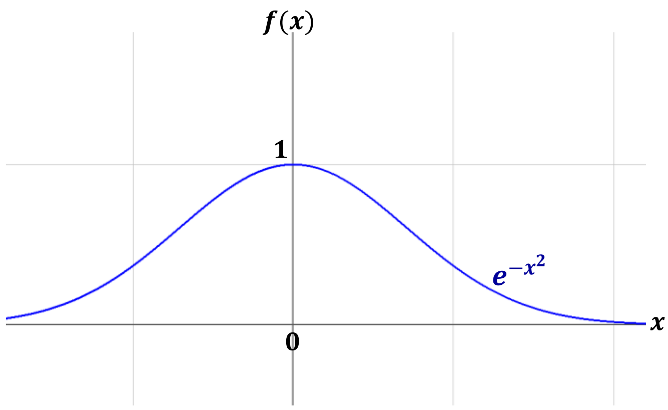
109 convexité d'une courbe :

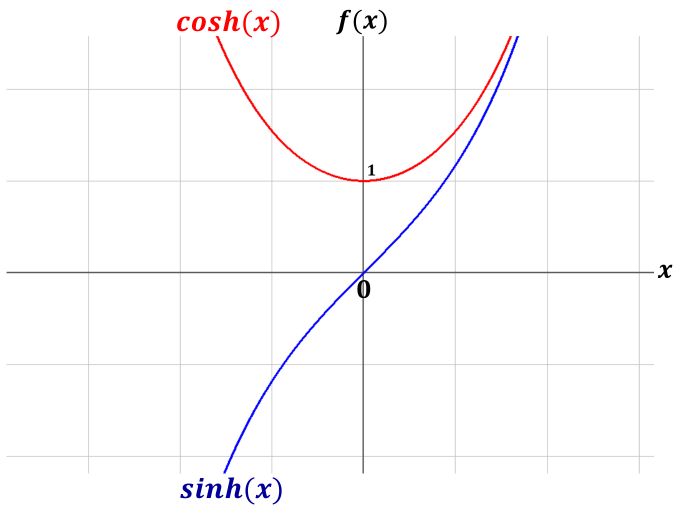
x	a	β	b
$f''(x)$	$+$	0	$-$
(C_f)	convexe	Point d'inflexion	concave

110 Quelques fonctions usuelles :









111 Branches infinies :

$\boxed{\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty} \iff \left| \begin{array}{l} (\Delta) : x = a \ \text{ est une} \\ \text{asymptote verticale} \\ \text{à la courbe } (C) \end{array} \right.$

$\boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = b} \iff \left| \begin{array}{l} (\Delta) : y = b \ \text{ est une} \\ \text{asymptote horizontale} \\ \text{à la courbe } (C) \end{array} \right.$

$\left\| \begin{array}{l} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty} \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} (C) \text{ admet une branche} \\ \text{parabolique suivant} \\ \text{l'axe } (OY) \end{array} \right.$

$\left\| \begin{array}{l} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = 0} \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} (C) \text{ admet une branche} \\ \text{parabolique suivant} \\ \text{l'axe } (OX) \end{array} \right.$

$\left\| \begin{array}{l} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = b} \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} (\Delta) : y = ax + b \\ \text{est une asymptote} \\ \text{à la courbe } (C) \end{array} \right.$

$\left\| \begin{array}{l} \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0} \\ \boxed{\lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty} \end{array} \right. \iff \left| \begin{array}{l} (C) \text{ admet une branche} \\ \text{parabolique suivant} \\ \text{La droite } (\Delta) : y = ax \end{array} \right.$

112 Continuité en un point :

$\left. \begin{array}{c} f \text{ est continue} \\ \text{en } x_0 \end{array} \right| \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

$\left. \begin{array}{c} f \text{ est continue} \\ \text{en } x_0 \end{array} \right| \iff \left| \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = \lim_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = f(x_0) \right.$

113 Continuité d'une somme de fcts :

$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue en } x_0 \\ g \text{ est continue en } x_0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} (f+g) \text{ est continue} \\ \text{en } x_0 \end{array} \right.$

114 Continuité d'un produit de fcts :

$\left. \begin{array}{l} f \text{ est continue en } x_0 \\ g \text{ est continue en } x_0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} (f\times g) \text{ est continue} \\ \text{en } x_0 \end{array} \right.$

115 Continuité d'un quotient de fcts :

$\left. \begin{array}{c} f \text{ est continue en } x_0 \\ g \text{ est continue en } x_0 \\ g(x_0) \neq 0 \end{array} \right| \Rightarrow \left| \begin{array}{c} \left(\frac{f}{g}\right) \text{ est continue} \\ \text{en } x_0 \end{array} \right.$

116 Continuité d'une composition :

$\left. \begin{array}{l} f : I \longmapsto \mathbb{R} \text{ est continue} \\ \quad \text{en } x_0 \text{ . avec } x_0 \in I \\ f : J \longmapsto \mathbb{R} \text{ est continue} \\ \text{en } f(x_0) \text{ . avec } f(I) \subseteq J \end{array} \right| \Rightarrow g \circ f \text{ est continue en } x_0$

$\left. \begin{array}{c} f \text{ continue sur } I \\ g \text{ continue sur } J \\ f(I) \subseteq J \end{array} \right| \Rightarrow g \circ f \text{ est continue sur } I$

117 TVI – version générale :

$\left. \begin{array}{r} f \text{ continue sur } [a,b] \\ y \in [f(a) ; f(b)] \end{array} \right| \Rightarrow \exists\, x \in [a,b] \ ; \ f(x) = y$

$[f(a) ; f(b)]$ *ou* $[f(b) ; f(a)]$ Selon la monotonie de la fonction f.

118 TVI – version particulière :

$\left. \begin{array}{r} f \text{ continue sur } [a,b] \\ f(a)\cdot f(b) \leq 0 \end{array} \right| \Rightarrow \exists\, x \in [a,b] \ ; \ f(x) = 0$

119 Dérivabilité en un point :

f est dérivable en x_0 $\Leftrightarrow$ $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right)=l\in\mathbb{R}$

120 Tableau des dérivées :

- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ (constante)'=0$
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ (ax+b)'=a$
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ (x^r)'=r\,x^{r-1}$
- $(\forall x\in\mathbb{R}),(\forall a>0)\ ;\ (a^x)'=a^x ln(a)$
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ (e^x)'=e^x$
- $\forall x\in\mathbb{R}_+^*\ ;\ (ln(x))'=\dfrac{1}{x}$
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ (sin(x))'=cos(x)$
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ (cos(x))'=-sin(x)$
- $\forall x\neq\dfrac{k\pi}{2}\ ;\ (tan(x))'=\dfrac{1}{cos^2(x)}=1+tan^2(x)$
- $\forall x\neq k\pi\ ;\ (cotan(x))'=\dfrac{-1}{sin^2(x)}=-\left(1+cotg^2(x)\right)$
- $\forall x\in]-1;1[\ ;\ (Arcsin(x))'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x\in]-1;1[\ ;\ (Arccos(x))'=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
- $\forall x\in\mathbb{R}\ ;\ (Arctan(x))'=\dfrac{1}{1+x^2}$

121 Dérivabilité ►► continuité :

f est dérivable en x_0 $\Rightarrow$ f est continue en x_0

122 Dérivée d'une composition :

$f:I\mapsto f(I)$ dériv sur I
$g:I\mapsto g(J)$ dériv sur $f(I)$
$f(I)\subseteq J$
$\Rightarrow$ $g\circ f$ est dérivable sur l'intervalle I
$(g\circ f)'=(g'\circ f)\times f'$

123 Opérateur de dérivation :

- $(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$
- $(f(x)\cdot g(x))'=f'(x)\cdot g(x)+g'(x)\cdot f(x)$
- $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x)\cdot g(x)-g'(x)\cdot f(x)}{(g(x))^2}$
- $\left(f(g(x))\right)'=g'(x)\cdot f'(g(x))$

124 Monotonie (Variations) :

$f:I\mapsto f(I)$ est une fonction croissante sur l'intervalle I $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y)\in I^2$:
oubien $\boxed{x>y\Rightarrow f(x)>f(y)}$
oubien $\boxed{x<y\Rightarrow f(x)<f(y)}$

$f:I\mapsto f(I)$ est une fct décroissante sur l'intervalle I $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y)\in I^2$:
oubien $\boxed{x>y\Rightarrow f(x)<f(y)}$
oubien $\boxed{x<y\Rightarrow f(x)>f(y)}$

$f:I\mapsto f(I)$ est une fonction $\boxed{\text{croissante}}$ sur l'intervalle I $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y)\in I^2:\ f'(x)\geq 0$

$f:I\mapsto f(I)$ est une fonction $\boxed{\text{décroissante}}$ sur l'intervalle I $\Leftrightarrow$ $\forall (x,y)\in I^2:\ f'(x)\leq 0$

125 Extrémums :

$\boxed{f \text{ admet un extrémum en } a}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{f'(a)=0}$

126 Fonction bijective :

f continue sur I
f est strictement monotone sur I
$\Rightarrow$ $f:I\mapsto f(I)$ est bijective

$f:I\mapsto f(I)$ est bijective $\Rightarrow$ f et f^{-1} ont les mêmes variations

$f:I\mapsto f(I)$ est bijective $\Rightarrow$ (C_f) et $(C_{f^{-1}})$ sont symétriques par rapport à $(\Delta):y=x$

127 Dérivée de la fonction inverse :

f est dérivable sur l'intervalle I
$f'\neq 0$ sur I
$\Rightarrow$ f^{-1} est dérivable sur $f(I)$
$(f^{-1})'=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}}$

128 Théorème de ROLLE :

f continue sur $[a,b]$
f dérivable sur $]a,b[$
$f(a)=f(b)$
$\Rightarrow$ $\exists c\in]a,b[\ ;\ f'(c)=0$

129 TAF – Égalité :

$$\left.\begin{array}{l} f\ \text{cont sur } [a,b] \\ f\ \text{déri sur }]a,b[\end{array}\right| \Rightarrow \exists\, c \in]a,b[\ ;\ \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) = f'(c)$$

130 TAF – Inégalité :

$$\left.\begin{array}{c} f\ \text{cont sur } [a,b] \\ f\ \text{déri sur }]a,b[\\ m \le f'(x) \le M \end{array}\right| \Rightarrow m \le \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right) \le M$$

131 Monotonie d'une suite numérique :

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} \ge u_n} \Leftrightarrow \boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{est une suite} \nearrow}$$

$$\boxed{(\forall n \in \mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} \le u_n} \Leftrightarrow \boxed{(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\ \text{est une suite} \searrow}$$

132 Suite arithmétique :

$$\boxed{(u_n)_n\ \text{est arithmétique}} \Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} = u_n + r}$$

$$\boxed{(u_n)_n\ \text{est arithmétique}} \Leftrightarrow \boxed{u_n = u_p + (n-p)r}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_p + \cdots + u_n = \left(\frac{n-p+1}{2}\right)(u_p + u_n)}\ ;\ n \ge p$$

133 Suite géométrique :

$$\boxed{(u_n)_n\ \text{est géométrique}} \Leftrightarrow \boxed{u_{n+1} = q\, u_n}$$

$$\boxed{(u_n)_n\ \text{est géométrique}} \Leftrightarrow \boxed{u_n = u_p \cdot q^{n-p}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_p + \cdots + u_n = \frac{1-q^{n-p+1}}{1-q} u_p}\ ;\ \left|\begin{array}{l} n \ge p \\ q \ne 1 \end{array}\right.$$

134 Suites & ordre :

$$u_n \le v_n,\quad u_n \xrightarrow[n\infty]{} \boxed{+\infty} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = +\infty}$$

$$u_n \le v_n,\quad v_n \xrightarrow[n\infty]{} \boxed{-\infty} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = -\infty}$$

$$v_n \le u_n \le w_n,\quad v_n \xrightarrow[n\infty]{} \boxed{l},\quad w_n \xrightarrow[n\infty]{} \boxed{l} \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = l}$$

$$u_n > a,\quad u_n \xrightarrow[n\infty]{} \boxed{l} \Rightarrow \boxed{l \ge a}$$

$$u_n < a,\quad u_n \xrightarrow[n\infty]{} \boxed{l} \Rightarrow \boxed{l \le a}$$

$$u_n < v_n,\quad u_n \xrightarrow[n\infty]{} \boxed{l},\quad v_n \xrightarrow[n\infty]{} \boxed{l'} \Rightarrow \boxed{l \le l'}$$

135 Suite majorée ou minorée :

$$\left.\begin{array}{c} (u_n)_n\ \text{est croissante} \\ (u_n)_n\ \text{est majorée} \\ (u_n \le M) \end{array}\right| \Rightarrow (u_n)_n\ \text{converge vers } l \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{c} (u_n)_n\ \text{est décroissante} \\ (u_n)_n\ \text{est minorée} \\ (u_n \ge m) \end{array}\right| \Rightarrow (u_n)_n\ \text{converge vers } l \in \mathbb{R}$$

$$\left.\begin{array}{c} (u_n)_n\ \text{est croissante} \\ (u_n)_n\ \text{non} - \text{majorée} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = +\infty}$$

$$\left.\begin{array}{c} (u_n)_n\ \text{est décroissante} \\ (u_n)_n\ \text{non} - \text{minorée} \end{array}\right| \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(u_n) = -\infty}$$

136 la suite $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\alpha > 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(\alpha^n) = +\infty}$$

$$\alpha = 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(\alpha^n) = 1}$$

$$-1 < \alpha < 1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(\alpha^n) = 0}$$

$$\alpha \le -1 \Rightarrow \boxed{\lim_{n\infty}(\alpha^n) = n'\text{existe pas}}$$

137 la suite $(n^{\alpha})_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\alpha \in \mathbb{N}^* \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\infty}(n^{\alpha}) = +\infty}$$

$$\alpha \in \mathbb{Z}_*^- \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\infty}(n^{\alpha}) = 0}$$

138 convergence ►► bornée :

$$\lim_{n\infty}(u_n) = l \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, M \in \mathbb{R}^+ \;;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \;:\; |u_n| \leq M$$

139 La suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$:

$$\left.\begin{array}{r} u_{n+1} = f(u_n) \\ f \text{ conti sur } I \subseteq \mathbb{R} \\ f(I) \subseteq I \;;\; u_0 \in I \\ \lim_{n\infty}(u_n) = l \in I \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{f(l) = l}$$

140 La suite récurrente $v_n = f(u_n)$:

$$\left.\begin{array}{r} v_n = f(u_n) \\ \lim_{n\infty}(u_n) = l \\ f \text{ conti en } l \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\lim_{n\infty}(v_n) = f(l)}$$

141 Suites adjacentes :

$$\left.\begin{array}{r} (u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \\ \text{sont adjacentes} \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} (u_n) \text{ est } \nearrow \;;\; (v_n) \text{ est } \searrow \\ \lim_{n\infty}(v_n - u_n) = 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{r} (u_n)_n \text{ et } (v_n)_n \\ \text{sont adjacentes} \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty}(v_n) = l \in \mathbb{R}$$

142 Résolution de l'équation différentielle : $y' = ay \;;\; a \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} y' = ay \quad &\Longrightarrow \quad \frac{y'}{y} = a \\ &\Longrightarrow \quad \int \left(\frac{y'}{y}\right) dx = \int a\, dx \\ &\Longrightarrow \quad \ln|y| + c_1 = ax + c_2 \\ &\Longrightarrow \quad e^{\ln|y| + c_1} = e^{ax + c_2} \\ &\Longrightarrow \quad e^{c_1} \cdot |y| = e^{c_2} \cdot e^{ax} \\ &\Longrightarrow \quad y = \left(\pm \frac{e^{c_2}}{e^{c_1}}\right) \cdot e^{ax} \\ &\Longrightarrow \quad \boxed{y = \lambda \cdot e^{ax} \;;\; \lambda \in \mathbb{R}} \end{aligned}$$

Inversement : Si $y = \lambda \cdot e^{ax} \;;\; \lambda \in \mathbb{R}$

Alors : $y' = ay$

Finalement : les solutions de l'équation diffé $y' = ay$ sont toutes les fonctions qui s'écrivent Sous la forme $y : x \longmapsto \lambda\, e^{ax} \;;\; \lambda \in \mathbb{R}$

143 Résolution de l'équation différentielle : $y' = ay + b \;;\; a, b \in \mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} y' = ay + b \quad &\Leftrightarrow \quad (y' - 0) = a\left(y + \frac{b}{a}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad Y' = aY \;;\; Y = \left(y + \frac{b}{a}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad Y = \alpha \cdot e^{ax} \;;\; \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad \left(y + \frac{b}{a}\right) = \alpha \cdot e^{ax} \;;\; \alpha \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad y = \left(\alpha\, e^{ax} - \frac{b}{a}\right) \;;\; \alpha \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

144 Résolution de l'équation différentielle : $y'' + ay' + by = 0 \;;\; a, b \in \mathbb{R}$

$\boxed{y'' + ay' + by = 0}$; $a, b \in \mathbb{R}$

$\boxed{r^2 + ar + b = 0}$; $a, b \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow \boxed{r \in \mathbb{R}} \longrightarrow \boxed{y = (\alpha x + b)\, e^{rx}}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow \boxed{\begin{array}{l} r_1 \in \mathbb{R} \\ r_2 \in \mathbb{R} \end{array}} \longrightarrow \boxed{y = \alpha\, e^{r_1 x} + \beta\, e^{r_2 x}}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$\longrightarrow \boxed{(m \pm in) \in \mathbb{C}^2}$

$\boxed{y = \left(\alpha \cos(nx) + \beta \sin(nx)\right) e^{mx}}$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

145 Évaluation d'une intégrale :

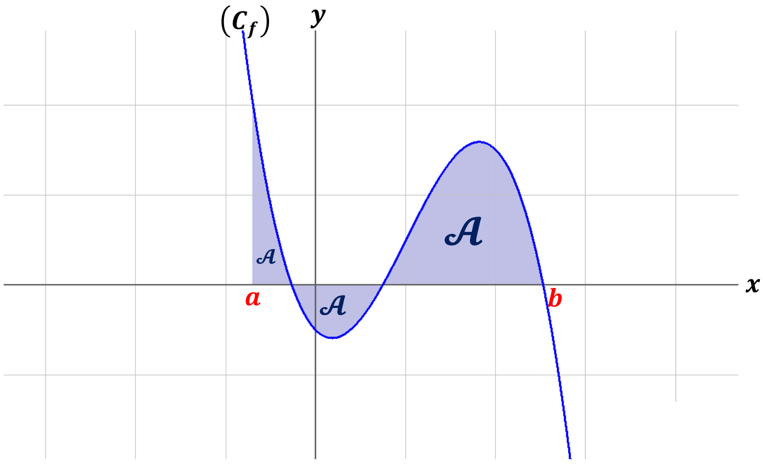
$$\int_a^b f(t)\, dt = [F(t)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Avec : f est continue sur I.
F est une primitive de f sur I.
$a, b \in I$.

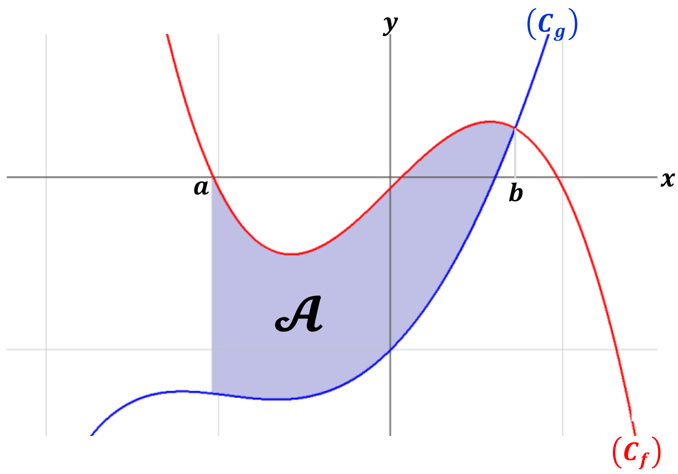
146 La fonction intégrale (primitive) :

$$\left.\begin{array}{r} f \text{ continue sur } I \\ \text{et soit } a \in I \end{array}\right| \quad \Longrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} \exists!\ \varphi = \text{primitive}(f) \text{ sur } I : \\ \varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt \;;\; \forall\, x \in I \\ \varphi(a) = 0 \\ \varphi'(x) = f(x) \;;\; \forall\, x \in I \end{array}\right.$$

147 Calcul d'aires :



$$\mathcal{A} = \left(\int_a^b |f(x)|\,dx\right)\quad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$



$$\mathcal{A} = \left(\int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx\right)\quad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

148 Intégration par parties :

$$\int_a^b f'(x)\cdot g(x)\,dx = [f(x)\cdot g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)\cdot g'(x)\,dx$$

Il faut faire attention à l'existence et la continuité des fonctions f et g' sur l'intervalle $[a,b]$.

149 Changement de variable :

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{u^{-1}(a)}^{u^{-1}(b)} \underbrace{f(u(t))}_{f(x)} \cdot \underbrace{u'(t)\,dt}_{dx}$$

Avec : $\left|\begin{array}{l} f \textit{ continue sur } J \\ u : \begin{array}{l} I \mapsto J \\ t \mapsto x = u(t) \end{array} \quad \textit{est une bijection} \\ u' \textit{ est continue sur } I. \\ u(I) \subseteq J \end{array}\right.$

150 Intégration et Ordre :

$$\left.\begin{array}{r} f(x) \le g(x) \\ a \le b \end{array}\right| \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$$

Avec : f continue sur I et a et b appartiennent à I.

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \le \int_a^b |f(x)|\,dx$$

Avec : f continue sur I et $a \le b$ appartiennent à I.

151 valeur médiane d'une fonction :

$$\left.\begin{array}{r} f \textit{ continue sur } I \\ a,b \in I\ ;\ a \le b \\ \forall x \in [a,b]\ ;\ m \le f(x) \le M \end{array}\right| \Rightarrow m(b-a) \le \int_a^b f(x)\,dx \le M(b-a)$$

Le nombre $\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt$ est la valeur médiane de la fonction f sur $[a,b]$.

152 Théorème de la médiane :

$$\left.\begin{array}{r} f \textit{ continue sur } [a,b] \\ \textit{avec } a < b \end{array}\right| \Rightarrow \left|\begin{array}{l} \exists\, c \in [a,b] : \\ \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = f(c) \end{array}\right.$$

153 Solide de révolution autour de (ox) :

$$\left.\begin{array}{r} f \textit{ continue sur } [a,b] \\ \textit{avec } a \le b \end{array}\right| \Rightarrow \mathcal{V}_S = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Avec S est le solide de révolution de f autour de (OX).
Et l'unité de mesure est $\|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \times \|\vec{k}\|$.

154 Sommes de Riemann sur [a,b] :

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(a + k\left(\frac{b-a}{n}\right)\right)\right) = \int_a^b f(x)\,dx$$

Avec : f est continue sur $[a,b]$, $a < b$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

155 Sommes de Riemann sur [0,1] :

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{k=n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\right) = \int_0^1 f(x)\,dx$$

Avec : f est continue sur $[0,1]$.

156 Intégrales indéfinies immédiates :

- $\int 1\, dx = x + c$
- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c \quad ; \quad n \neq -1$
- $\int \sqrt[n]{x}\, dx = \frac{n}{n+1} \sqrt[n]{x^{n+1}} + c$
- $\int x^{-1}\, dx = ln|x| + c$
- $\int a^x\, dx = \frac{a^x}{ln(a)} + c \; ; \; \left| \begin{array}{l} a > 0 \\ a \neq 1 \end{array} \right.$
- $\int e^x\, dx = e^x + c$
- $\int sin(x)\, dx = -cos(x) + c$
- $\int cos(x)\, dx = sin(x) + c$
- $\int \frac{1}{cos^2(x)}\, dx = tan(x) + c$
- $\int \frac{1}{sin^2(x)}\, dx = \frac{-1}{tan(x)} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = arcsin(x) + c$
- $\int \frac{1}{1+x^2}\, dx = arctan(x) + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\, dx = ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right| + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}\, dx = ln\left|x + \sqrt{x^2-1}\right| + c \quad ; \quad |x| > 1$
- $\int \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2} ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c \quad ; \quad |x| < 1$
- $\int \frac{1}{x^2-1}\, dx = \frac{1}{2} ln\left|\frac{x-1}{x+1}\right| + c \quad ; \quad |x| > 1$
- $\int (ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+1}}{a(n+1)} + c \quad ; \quad \left| \begin{array}{l} n \neq -1 \\ a \neq 0 \end{array} \right.$
- $\int (ax+b)^{-1}\, dx = \frac{ln|ax+b|}{a} + c \quad ; \quad a \neq 0$
- $\int x(ax+b)^n\, dx = \frac{(ax+b)^{n+2}}{a^2(n+2)} - \frac{b(ax+b)^{n+1}}{a^2(n+1)} + c \; ; \left| \begin{array}{l} a \neq 0 \\ n \neq -1 \\ n \neq -2 \end{array} \right.$
- $\int x(ax+b)^{-1}\, dx = \frac{x}{a} - \frac{b\, ln|ax+b|}{a^2} + c$
- $\int x(ax+b)^{-2}\, dx = \frac{b}{a^2(ax+b)} + \frac{ln|ax+b|}{a^2} + c$

- $\int \frac{1}{x(ax+b)}\,dx = -\frac{1}{b}\,ln\left|\frac{ax+b}{x}\right| + c$

- $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{a}\,arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$

- $\int \frac{x}{x^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\,ln(x^2+a^2) + c$

- $\int \frac{x^2}{x^2+a^2}\,dx = x - a\cdot arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$

- $\int \frac{1}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{1}{2a^2}\,ln\left(\frac{x^2}{x^2+a^2}\right) + c \;\; ; \;\; |x| > a$

- $\int \frac{1}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2a}\,ln\left(\frac{x-a}{x+a}\right) + c$

- $\int \frac{x}{x^2-a^2}\,dx = \frac{1}{2}\,ln|x^2-a^2| + c$

- $\int \frac{x}{(x^2-a^2)^n}\,dx = \frac{-1}{2(n-1)(x^2-a^2)^{n-1}} + c \;\; ; \;\; \left|\begin{array}{l} n \neq 1 \\ |x| < a \end{array}\right.$

- $\int \frac{1}{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2a}ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + c$

- $\int \frac{x}{a^2-x^2}\,dx = \frac{-1}{2}ln|a^2-x^2| + c$

- $\int \frac{x}{(a^2-x^2)^n}\,dx = \frac{1}{2(n-1)(a^2-x^2)^{n-1}} + c \;\; ; \;\; n \neq 1$

- $\int \frac{1}{ax^2+bx+c}\,dx = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{-\Delta}}\,arctan\left(\frac{2ax+b}{\sqrt{-\Delta}}\right) + c \;\; ; \;\; \Delta < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\,ln\left|\frac{2ax+b-\sqrt{\Delta}}{2ax+b+\sqrt{\Delta}}\right| + c \;\; ; \;\; \Delta > 0 \end{cases}$

- $\int \frac{x}{ax^2+bx+c}\,dx = \frac{1}{2a}ln|ax^2+bx+c| - \frac{b}{2a}\int \frac{1}{ax^2+bx+c}dx \;\; + c$

- $\int \frac{1}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2\sqrt{ax+b}}{a} + c$

- $\int \frac{x}{\sqrt{ax+b}}dx = \frac{2(ax-2b)\sqrt{ax+b}}{3a^2} \;\; + c$

- $\int \sqrt{ax+b}\;dx = \frac{2\sqrt{(ax+b)^3}}{3a} + c$

- $\int x\sqrt{ax+b}\;dx = \frac{2(3ax-2b)\sqrt{(ax+b)^3}}{15a^2} + c$

- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = ln\left|x+\sqrt{a^2+x^2}\right| + c$

- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \sqrt{x^2+a^2} + c$
- $\int \frac{x}{x\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{-1}{a}\,ln\left|\frac{a+\sqrt{x^2+a^2}}{x}\right| + c$
- $\int \frac{x}{x^2\sqrt{x^2+a^2}}\,dx = \frac{-\sqrt{a^2+x^2}}{a^2x} + 2$
- $\int \sqrt{x^2+a^2}\,\,dx = \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\,ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right| + c$
- $\int x\sqrt{x^2+a^2}\,\,dx = \frac{1}{3}(x^2+a^2)\sqrt{x^2+a^2} + c$
- $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c \quad ; \quad |x| > a$
- $\int \frac{x}{\sqrt{x^2-a^2}}\,dx = \sqrt{x^2-a^2} + c \quad ; \quad |x| > a$
- $\int \sqrt{x^2-a^2}\,\,dx = \frac{x\sqrt{x^2-a^2}}{2} - \frac{a^2}{2}\,ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right| + c \quad ; \quad |x| > a$
- $\int x\sqrt{x^2-a^2}\,\,dx = \frac{(x^2-a^2)\sqrt{x^2-a^2}}{3} + c \quad ; \quad |x| > a$
- $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad ; \quad |x| < a$
- $\int \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}\,dx = -\sqrt{a^2-x^2} + c \quad ; \quad |x| < a$
- $\int \sqrt{a^2-x^2}\,\,dx = \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{2} + \frac{a^2}{2}\,arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \quad ; \quad |x| < a$
- $\int x\sqrt{a^2-x^2}\,\,dx = \frac{-(a^2-x^2)\sqrt{a^2-x^2}}{3} + c \quad ; \quad |x| < a$
- $\int \frac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}\,dx = \sqrt{a^2-x^2} - a\,ln\left|\frac{a+\sqrt{a^2-x^2}}{x}\right| + c \quad ; \quad |x| < a$
- $\int sin(ax)\,dx = \frac{-cos(ax)}{a} + c$
- $\int x\,sin(ax)\,dx = \frac{sin(ax)}{a^2} - \frac{x\,cos(ax)}{a} + c$
- $\int \frac{1}{sin(ax)}\,dx = \frac{1}{a}\,ln\left|tan\left(\frac{ax}{2}\right)\right| + c$
- $\int \frac{1}{1+sin(ax)}\,dx = \frac{1}{a}\,tan\left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + c$
- $\int \frac{1}{1-sin(ax)}\,dx = \frac{1}{a}\,tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right) + c$
- $\int \frac{x}{1+sin(ax)}\,dx = \frac{x}{a}\,tan\left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{2}{a^2}\,ln\left|cos\left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$
- $\int \frac{x}{1-sin(ax)}\,dx = \frac{x}{a}\,cotg\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\,ln\left|sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right)\right| + c$

- $\int \frac{sin(ax)}{1+sin(ax)}dx = x + \frac{1}{a} tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{ax}{2}\right) + c$

- $\int \frac{sin(ax)}{1-sin(ax)}dx = -x + \frac{1}{a} tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{ax}{2}\right) + c$

- $\int cos(ax)\ dx = \frac{1}{a} sin(ax) + c$

- $\int x\,cos(ax)\ dx = \frac{cos(ax)}{a^2} + \frac{x\,sin(ax)}{a} + c$

- $\int \frac{1}{cos(ax)}\ dx = \frac{1}{a}\ ln\left|tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + c$

- $\int \frac{1}{1+cos(ax)}\ dx = \frac{1}{a}\ tan\left(\frac{ax}{2}\right) + c$

- $\int \frac{1}{1-cos(ax)}\ dx = \frac{-1}{a}\ cotg\left(\frac{ax}{2}\right) + c$

- $\int \frac{x}{1+cos(ax)}\ dx = \frac{x}{a}\ tan\left(\frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ ln\left|cos\left(\frac{ax}{2}\right)\right| + c$

- $\int \frac{x}{1-cos(ax)}\ dx = \frac{-x}{a}\ cotg\left(\frac{ax}{2}\right) + \frac{2}{a^2}\ ln\left|sin\left(\frac{ax}{2}\right)\right| + c$

- $\int \frac{cos(ax)}{1+cos(ax)}\ dx = x - \frac{1}{a}\ tan\left(\frac{ax}{2}\right) + c$

- $\int \frac{cos(ax)}{1-cos(ax)}\ dx = -x - \frac{1}{a}\ tan\left(\frac{ax}{2}\right) + c$

- $\int \frac{1}{sin(ax)+cos(ax)}\ dx = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ ln\left|tan\left(\frac{ax}{2} + \frac{\pi}{8}\right)\right| + c$

- $\int \frac{1}{sin(ax)-cos(ax)}\ dx = \frac{1}{a\sqrt{2}}\ ln\left|tan\left(\frac{ax}{2} - \frac{\pi}{8}\right)\right| + c$

- $\int \frac{cos(ax)}{sin(ax)+cos(ax)}\ dx = \frac{x}{2} + \frac{ln|sin(ax)+cos(ax)|}{2a} + c$

- $\int \frac{cos(ax)}{sin(ax)-cos(ax)}\ dx = \frac{-x}{2} + \frac{ln|sin(ax)-cos(ax)|}{2a} + c$

- $\int \frac{sin(ax)}{sin(ax)+cos(ax)}\ dx = \frac{x}{2} - \frac{ln|sin(ax)+cos(ax)|}{2a} + c$

- $\int \frac{sin(ax)}{sin(ax)-cos(ax)}\ dx = \frac{x}{2} + \frac{ln|sin(ax)-cos(ax)|}{2a} + c$

- $\int tan(ax)\ dx = \frac{-1}{a}\ ln|cos(ax)| + c$

- $\int \frac{tan^n(ax)}{cos^2(ax)}\ dx = \frac{tan^{n+1}(ax)}{a(n+1)} \quad ; \quad n \neq -1$

- $\int \frac{1}{tan(ax)}\ dx = \frac{1}{a}\ ln|sin(ax)| + c$

- $\int \frac{cotg^n(ax)}{sin^2(ax)}\ dx = \frac{-cotg^{n+1}(ax)}{a(n+1)} + c \quad ; \quad n \neq -1$

- $\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}\,e^{ax} + c$
- $\int x\,e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x - \frac{1}{a}\right) + c$
- $\int x^2\,e^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a}\left(x^2 - \frac{2x}{a} + \frac{2}{a^2}\right) + c$
- $\int e^{ax}\sin(bx)\,dx = \frac{e^{ax}\big(a\sin(bx) - b\cos(bx)\big)}{a^2 + b^2} + c$
- $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}\big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\big)}{a^2 + b^2} + c$
- $\int e^{ax}\cos(bx)\,dx = \frac{e^{ax}\big(a\cos(bx) + b\sin(bx)\big)}{a^2 + b^2} + c$
- $\int \ln(x)\,dx = x\ln(x) - x + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int x\ln(x)\,dx = \frac{x^2}{2}\left(\ln(x) - \frac{1}{2}\right) + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int x^n\ln(x)\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\left(\ln(x) - \frac{1}{n+1}\right) + c \quad ; \quad \left|\begin{array}{l} x > 0 \\ n \neq -1 \end{array}\right.$
- $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx = \frac{1}{2}\,\big(\ln(x)\big)^2 + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx = \frac{-\ln(x)}{x} - \frac{1}{x} + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int \frac{\big(\ln(x)\big)^n}{x}\,dx = \frac{\big(\ln(x)\big)^{n+1}}{n+1} + c \quad ; \quad \left|\begin{array}{l} x > 0 \\ n \neq -1 \end{array}\right.$
- $\int \frac{1}{x\ln(x)}\,dx = \ln\big(\ln(x)\big) + c \quad ; \quad x > 1$
- $\int \ln(x^2 + a^2)\,dx = x\ln(x^2 + a^2) - 2x + 2a\,Arctan\left(\frac{x}{a}\right) + c$
- $\int \ln(x^2 - a^2)\,dx = x\ln(x^2 - a^2) - 2x + a\ln\left(\frac{x+a}{x-a}\right) + c \;\; ; \;\; |x| > a$
- $\int \sin\big(\ln(x)\big)\,dx = \frac{x\Big(\sin\big(\ln(x)\big) - \cos\big(\ln(x)\big)\Big)}{2} + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int \cos\big(\ln(x)\big)\,dx = \frac{x\Big(\sin\big(\ln(x)\big) + \cos\big(\ln(x)\big)\Big)}{2} + c \quad ; \quad x > 0$
- $\int Arcsin\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\,Arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \sqrt{a^2 - x^2} + c$
- $\int x\,Arcsin\left(\frac{x}{a}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) Arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{4} + c$
- $\int Arcsin\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\,Arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \sqrt{a^2 - x^2} + c$
- $\int x\,Arccos\left(\frac{x}{a}\right)dx = \left(\frac{x^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) Arccos\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{4} + c$
- $\int Arctan\left(\frac{x}{a}\right)dx = x\,Arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{a}{2}\,\ln(a^2 + x^2) + c$
- $\int x\,Arctan\left(\frac{x}{a}\right)dx = \frac{1}{2}(a^2 + x^2)Arctan\left(\frac{x}{a}\right) - \frac{ax}{2} + c$

Mathématiques

Enoncés des Examens

2015 normale et de Rattrapage

2016 normale et de Rattrapage

2017 normale et de Rattrapage

2018 normale et de Rattrapage

2019 normale et de Rattrapage

Deux Examens blancs

التمرين الأول : (3,0 ن)

1 نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E) : \quad z^2 - (5+i\sqrt{3})z + 4 + 4i\sqrt{3} = 0$

أ 1 تحقق أن $(3-i\sqrt{3})^2$ هو مميز المعادلة (E). — 0,25 ن

ب 1 حدد a و b حلي المعادلة (E) (علما أن $b\epsilon\mathbb{R}$) — 0,50 ن

ج 1 تحقق أن : $b = (1-i\sqrt{3})a$ — 0,25 ن

2 المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. لتكن A و B النقطتان ذواتا اللحقين a و b على التوالي.

أ 2 حدد العدد العقدي b_1 لحق النقطة B_1 صورة النقطة O بالدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{2}$. — 0,50 ن

ب 2 بين أن B هي صورة B_1 بالتحاكي الذي مركزه A و نسبته $\sqrt{3}$. — 0,50 ن

ج 2 تحقق أن : $arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$. — 0,50 ن

د 2 لتكن C نقطة ، لحقها c ، تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث OAB و تخالف O و A . حدد عمدة للعدد العقدي $\frac{c}{c-a}$. — 0,50 ن

التمرين الثاني : (3,0 ن)

ليكن x عددا صحيحا نسبيا بحيث : $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

1 علما أن : $1436 \times 1051 - 2015 \times 749 = 1$ ، بين أن 1436 و 2015 أوليان فيما بينهما. — 0,25 ن

2 ليكن d قاسما مشتركا للعددين x و 2015 .

أ 2 بين أن d يقسم 1436. — 0,50 ن

ب 2 استنتج أن x و 2015 أوليان فيما بينهما. — 0,50 ن

أ 3 باستعمال مبرهنة فيرما بين أن : — 0,75 ن

$$x^{1440} \equiv 1[5] \quad \text{و} \quad x^{1440} \equiv 1[13] \quad \text{و} \quad x^{1440} \equiv 1[31]$$

(لاحظ أن : $2015 = 5 \times 13 \times 31$)

ب 3 بين أن $x^{1440} \equiv 1[65]$ ثم استنتج أن : $x^{1440} \equiv 1[2015]$. — 0,50 ن

4 بين أن : $x \equiv 1051[2015]$. — 0,50 ن

التمرين الثالث : (4,0 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ و أن $(\mathbb{R},+)$ زمرة تبادلية.

لكل عدد حقيقي x نضع : $M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة : $E = \{M(x)\,;x\epsilon\mathbb{R}\}$

نزود E بقانون التركيب الداخلي $\top$ المعرف بما يلي :

$$(\forall (x,y)\epsilon\mathbb{R}^2) \ ; \ M(x) \top M(y) = M(x+y+1)$$

ليكن φ التطبيق من $\mathbb{R}$ نحو E المعرف بـ : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}) \ ; \ \varphi(x) = M(x-1)$		1	
بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{R},+)$ نحو $(E,\top)$.	أ	1	0,50 ن
بين أن $(E,\top)$ زمرة تبادلية.	ب	1	0,50 ن
بين أن : $\forall (x,y)\epsilon\mathbb{R}^2 \ ; \ M(x)\times M(y) = M(x+y+xy)$	أ	2	0,50 ن
استنتج أن E جزء مستقر من $(M_2(\mathbb{R}),\times)$ و أن القانون $\times$ تبادلي في E .	ب	2	0,50 ن
بين أن القانون $\times$ توزيعي بالنسبة للقانون $\top$ في E .	ج	2	0,50 ن
تحقق أن $M(-1)$ هو العنصر المحايد في $(E,\top)$. و أن I هو المحايد في $(E,\times)$.	د	2	0,50 ن
تحقق أن : $\forall \ x \ \epsilon \ \mathbb{R} \setminus \{-1\} \ ; \ M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$	أ	3	0,25 ن
بين أن $(E,\top,\times)$ جسم تبادلي.	ب	3	0,75 ن

●●● التمرين الرابع : (6,5 ن)

لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = x(1+(\ln x)^2) \ ; \ \forall x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل للدالة f في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.			I	
أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$. ثم أول مبيانيا النتيجة.		1	I	0,50 ن
بين أن الدالة f متصلة على اليمين في 0 .	أ	2	I	0,25 ن
أحسب النهاية $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{x}$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.	ب	2	I	0,50 ن
أحسب $f'(x)$ من أجل $x>0$ ثم استنتج أن f تزايدية قطعا على $[0,+\infty[$.	ج	2	I	0,50 ن
بين أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف I أفصولها e^{-1} .	أ	3	I	0,25 ن
أدرس الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{C})$ بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=x$.	ب	3	I	0,25 ن
أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$. (نأخذ $e^{-1}\approx 0,4$)	ج	3	I	0,50 ن
الجزء الثاني : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي :			II	

$$\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \ ; \ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = e^{-1} \end{cases}$$

بين بالترجع أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}) \ ; \ e^{-1} \leq u_n \leq 1$.		1	II	0,50 ن
بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 0}$ تزايدية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.		2	II	0,50 ن
نضع : $\lim_{n\infty}(u_n) = l$. بين أن : $e^{-1} \leq l \leq 1$.	أ	3	II	0,25 ن
حدد قيمة النهاية l .	ب	3	II	0,50 ن

الجزء الثالث : لتكن F الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$$

ن 0,25	أ 1 : بين أن الدالة $x \to \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2 \ln x$: دالة أصلية للدالة $h : x \to x\ln x$ على المجال $]0,+\infty[$.
ن 0,50	ب 1 : بين أن : $\int_1^x t(\ln t)^2\,dt = \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 - \int_1^x (t\ln t)\,dt \quad ; \quad (\forall x > 0)$
ن 0,50	ج 1 : استنتج أن : $F(x) = \frac{-3}{4} + \frac{3x^2}{4} - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{2}(\ln x)^2 \quad ; \quad (\forall x > 0)$
ن 0,25	أ 2 : بين أن الدالة F متصلة على المجال $[0,+\infty[$.
ن 0,50	ب 2 : أحسب $\lim_{x\to 0^+} F(x)$ ثم استنتج قيمة التكامل $\int_0^1 f(x)\,dx$

التمرين الخامس : (3,5 ن)

نعتبر الدالة g المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} g(x) = \int_x^{2x} \frac{e^{-t}}{t}\,dt \;;\; \forall x > 0 \\ g(0) = \ln 2 \end{cases}$$

ن 0,50	أ 1 : بين أن : $e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x} \;;\; (\forall x > 0), (\forall\, t \in [x,2x])$
ن 0,50	ب 1 : بين أن : $e^{-2x}\ln 2 \le g(x) \le e^{-x}\ln 2 \;;\; (\forall x > 0)$
ن 0,25	ج 1 : استنتج أن الدالة g متصلة على اليمين في 0 .
ن 0,75	2 : بين أن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم احسب $g'(x)$ من أجل $x > 0$.
ن 0,50	أ 3 : بين أن : $-1 \le \frac{e^{-t}-1}{t} \le -e^{-t} \;;\; (\forall t > 0)$
ن 0,50	ب 3 : بين أن : $-1 \le \frac{g(x)-\ln 2}{x} \le \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x} \;;\; (\forall x > 0)$
ن 0,50	ج 3 : استنتج أن الدالة g قابلة للاشتقاق على اليمين في 0 .

التمرين الأول : (4,0 ن)

I نزود $\mathbb{R}$ بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2) \; ; \; x * y = x + y - e^{xy} + 1$$

0,25 ن — I 1 أ — بين أن القانون $*$ تبادلي في $\mathbb{R}$.

0,50 ن — I 1 ب — بين أن القانون $*$ يقبل عنصرا محايدا وجب تحديده .

0,50 ن — I 2 — علما أن المعادلة $(E) : 3 + x - e^{2x} = 0$ تقبل في $\mathbb{R}$ حلين مختلفين α و β ، بين أن القانون $*$ غير تجميعي.

II نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \times)$ حلقة غير تبادلية و واحدية وحدتها $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و أن $(\mathbb{C}^*, \times)$ زمرة تبادلية.

لكل x و y من $\mathbb{R}$ نضع $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix}$.

و ليكن $\mathcal{F} = \{ M(x,y) \; ; \; (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$.

0,50 ن — II 1 — بين أن $\mathcal{F}$ فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$.

0,50 ن — II 2 — بين أن $\mathcal{F}$ جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$.

II 3 — نعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو $\mathcal{F}$ الذي يربط كل عقدي $x + iy$ بالمصفوفة $M(x,y)$.

0,50 ن — II 3 أ — بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*, \times)$ نحو $(\mathcal{F}, \times)$.

0,25 ن — II 3 ب — نضع : $\mathcal{F}^* = \mathcal{F} - \{M(0,0)\}$. بين أن : $\varphi(\mathbb{C}^*) = \mathcal{F}^*$.

0,25 ن — II 3 ج — بين أن $(\mathcal{F}^*, \times)$ زمرة تبادلية.

0,75 ن — II 4 — بين أن $(\mathcal{F}, +, \times)$ جسم تبادلي.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

I ليكن a من $\mathbb{Z}$ ،

0,50 ن — I 1 — بين أنه إذا كان a و 13 أوليان فيما بينهما فإن : $a^{2016} \equiv 1[13]$.

I 2 — نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E) : \; x^{2015} \equiv 2[13]$. و ليكن x حلا للمعادلة (E) .

0,50 ن — I 2 أ — بين أن x و 13 أوليان فيما بينهما .

0,50 ن — I 2 ب — بين أن : $x \equiv 7[13]$.

0,50 ن — I 3 — بين أن مجموعة حلول المعادلة (E) هي : $\mathcal{S} = \{ 7 + 13k \; ; \; k \in \mathbb{Z} \}$

II نعتبر صندوقا $\mathcal{U}$ يحتوي على خمسين كرة مرقمة من 1 إلى 50
(لا يمكن التمييز بينها باللمس) . نسحب عشوائيا كرة من الصندوق.

0,50 ن — II 1 — ما هو احتمال الحصول على كرة تحمل رقما يكون حلا للمعادلة (E) ؟

II 2 — نسحب عشوائيا كرة من الصندوق، نسجل رقمها ثم نعيدها إلى الصندوق.
نكرر هذه التجربة ثلاث مرات.

0,50 ن — ما هو احتمال الحصول مرتين بالضبط على كرة تحمل رقما يكون حلا لـ (E) ؟

التمرين الثالث : (3,0 ن)

	1		نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E):\ z^2-(1+i)z+2+2i=0$
0,25 ن	1	أ	تحقق أن $(1-3i)^2$ هو مميز المعادلة (E) .
0,50 ن	1	ب	حدد z_1 و z_2 حلي المعادلة (E) في المجموعة $\mathbb{C}$. (نأخذ z_1 تخيلي صرف).
0,50 ن	1	ج	بين أن : $\frac{z_1}{z_2}=\sqrt{2}\,e^{\frac{i3\pi}{4}}$.
	2		المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر النقطة A التي لحقها z_1 و B النقطة التي لحقها z_2 .
0,25 ن	2	أ	حدد العدد العقدي e لحق النقطة E منتصف القطعة $[AB]$.
0,50 ن	2	ب	ليكن r الدوران الذي مركزه A و قياس زاويته $\frac{-\pi}{2}$. و ليكن c لحق النقطة C صورة النقطة E بالدوران r. بين أن : $c=\frac{-3}{2}+\frac{3}{2}i$.
	2	ج	نعتبر النقطة D ذات اللحق $d=1+\frac{3}{2}i$.
1,00 ن	2	ج	بين أن العدد $\left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$ حقيقي . ثم اعط تأويلا هندسيا لذلك .

التمرين الرابع : (6,0 ن)

			ليكن n عددا صحيحا طبيعيا غير منعدم. نعتبر الدالة العددية f_n للمتغير الحقيقي x المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $f_n(x)=\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$ و ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,75 ن	1	أ	أحسب النهايتين التاليتين ثم اعط تأويلا مبيانيا لهما : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x)$
0,75 ن	1	ب	بين أن الدالة f_n قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ ثم أحسب $f_n'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$
0,25 ن	1	ج	بين أن الدالة f_n تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
0,50 ن	2	أ	بين ان النقطة $I_n\left(n,\frac{1}{2}\right)$ مركز تماثل للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$.
0,50 ن	2	ب	أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_1)$.
0,75 ن	2	ج	أحسب مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C}_1)$ و المستقيمات ذات المعادلات الديكارتية التالية : $x=0$ و $x=1$ و $y=0$.
0,75 ن	3	أ	لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، بين أن المعادلة $f_n(x)=x$ تقبل حلا وحيدا u_n في $]0,n[$.
0,50 ن	3	ب	بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\,,(\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f_{n+1}(x)<f_n(x)$
0,75 ن	3	ج	بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.
0,50 ن	3	د	أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

التمرين الخامس : (4,0 ن)

نعتبر الدالة العددية g المعرفة على $\mathbb{R}^*$ بما يلي : $g(x) = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt$

0,50 ن | 1 | بين أن الدالة g زوجية .

0,75 ن | 2 | بين أن g قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$. ثم أحسب $g'(x)$ من أجل $x > 0$.

0,50 ن | 3 | أ | باستعمال مكاملة بالأجزاء، تحقق أن :

$$(\forall x > 0) \ ; \ \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt = \left(\frac{\sin 3x - 3\sin x}{3x}\right) + \int_x^{3x} \left(\frac{\sin t}{t^2}\right) dt$$

0,75 ن | 3 | ب | بين أنه لكل x من $]0,+\infty[$ ، لدينا : $|g(x)| \leq \frac{10}{3x}$ ثم استنتج قيمة: $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

0,50 ن | 4 | أ | بين أن : $(\forall x > 0) \ ; \ 0 \leq \int_x^{3x} \left(\frac{1-\cos t}{t}\right) dt \leq 2x$

(لاحظ أن : $(\forall x > 0) \ ; \ 1 - \cos t \leq t$)

0,50 ن | 4 | ب | تحقق أن : $(\forall x > 0) \ ; \ g(x) - \ln 3 = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t - 1}{t}\right) dt$

0,50 ن | 4 | ج | استنتج قيمة النهاية التالية : $\lim_{x\to 0^+} g(x)$

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي . لكل (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نضع :

$$M(x,y)=\begin{pmatrix}x+y&0&-2y\\0&0&0\\y&0&x-y\end{pmatrix}\quad et\quad E=\{M(x,y)\ ;\ (x,y)\in\mathbb{R}^2\}$$

0,50 ن	1 بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.
0,50 ن	2 تحقق أن : $M(x,y)\times M(x',y')=M(xx'-yy',xy'+yx')$; $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ ، $\forall(x',y')\in\mathbb{R}^2$
	3 نضع : $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$. و نعتبر التطبيق $\varphi:\mathbb{C}^*\mapsto E$ ، $x+iy\mapsto M(x,y)$; $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$
0,25 ن	3 أ بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.
0,75 ن	3 ب استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية و أن عنصرها المحايد هو $M(1,0)$.
0,50 ن	4 بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.
0,50 ن	5 أ أحسب $A\times M(x,y)$ من أجل $M(x,y)$ عنصر من E . حيث : $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
0,50 ن	5 ب استنتج أن كل عنصر من عناصر E لا يقبل مماثلا في $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\times)$.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

	I ليكن (a,b) من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ بحيث العدد الأولي 173 يقسم (a^3+b^3)
0,25 ن	I 1 بين أن : $a^{171}\equiv -b^{171}[173]$. (لاحظ أن : $171=3\times 57$).
0,25 ن	I 2 بين أن 173 يقسم العدد a إذا و فقط إذا كان 173 يقسم b .
0,25 ن	I 3 نفترض أن 173 يقسم العدد a . بين أن 173 يقسم $(a+b)$
0,50 ن	I 4 أ نفترض أن 173 لا يقسم العدد a. بين أن : $a^{172}\equiv b^{172}[173]$.
0,50 ن	I 4 ب بين أن : $b^{171}(a+b)\equiv 0[173]$.
0,50 ن	I 4 ج استنتج أن 173 يقسم العدد $(a+b)$.
	II نعتبر في $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ المعادلة التالية : $(E):\ x^3+y^3=173(xy+1)$ ليكن (x,y) عنصرا من $\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}^*$ حلا للمعادلة (E). نضع $x+y=173k$ مع $k\in\mathbb{N}^*$.
0,25 ن	II 1 تحقق أن : $k(x-y)^2+(k-1)xy=1$.
0,50 ن	II 2 بين أن : $k=1$. ثم استنتج حل المعادلة (E) .

التمرين الثالث : (3,5 ن)

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م م م م $(\mathcal{O},\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر نقطتين M_1 و M_2 من المستوى $(\mathcal{P})$ بحيث تكون النقط $\mathcal{O}$ و M_1 و M_2 مختلفة مثنى مثنى و غير مستقيمية , ليكن z_1 و z_2 لحقي M_1 و M_2 على التوالي و لتكن M النقطة التي لحقها z يحقق $z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}$.

0,50 ن | 1 | أ | بين أن : $\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1$.

0,50 ن | 1 | ب | استنتج أن النقطة M تنتمي إلى الدائرة المحيطة بالمثلث $\mathcal{O}M_1M_2$.

0,50 ن | 2 | بين أنه إذا كانت $z_2=\overline{z_1}$ فإن M تنتمي إلى المحور الحقيقي.

3 | نفترض أن z_2 هي صورة M_1 بالدوران r الذي مركزه $\mathcal{O}$ و قياس زاويته α حيث $\alpha\,\epsilon\,]0,\pi[$.

0,50 ن | 3 | أ | أحسب z_2 بدلالة z_1 و α .

0,50 ن | 3 | ب | استنتج أن النقطة M تنتمي إلى واسط القطعة $[M_1M_2]$.

4 | ليكن θ عددا حقيقيا معلوما من المجال $]0,\pi[$.

نفترض أن z_1 و z_2 هما حلا المعادلة : $(G):6t^2-(e^{i\theta}+1)t+(e^{i\theta}-1)=0$

0,50 ن | 4 | أ | بدون حساب z_1 و z_2 ، تحقق من أن : $z=2\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right)$

0,50 ن | 4 | ب | اعط الصيغة المثلثية للعدد العقدي z بدلالة θ .

التمرين الرابع : (7,0 ن)

0,50 ن | I | 1 | بتطبيق مبرهنة التزايدات المنتهية على $t\ \to\ e^{-t}$ ، بين أنه لكل عدد حقيقي موجب قطعا x يوجد عدد حقيقي θ محصور بين 0 و x حيث : $e^{\theta}=\frac{x}{1-e^{-x}}$

0,25 ن | I | 2 | أ | استنتج أن : $1-x<e^{-x}\ ;\ (\forall x>0)$.

0,25 ن | I | 2 | ب | استنتج أن : $x+1<e^{x}\ ;\ (\forall x>0)$.

0,25 ن | I | 2 | ج | استنتج أن : $x<\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)<0\ ;\ (\forall x>0)$.

II | الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{xe^x}{e^x-1}\ ;\ \forall x>0 \\ f(0)=1 \end{cases}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في المستوى المنسوب إلى م م م $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن | II | 1 | أ | بين أن الدالة f متصلة على اليمين في الصفر.

0,50 ن | II | 1 | ب | بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-x)=0$ ثم أول مبيانيا النتيجة المحصل عليها.

0,25 ن | II | 2 | أ | بين أن : $x\le -e^{-x}+1\le x-\frac{x^2}{2}\ ;\ (\forall x\ge 0)$

0,50 ن | II | 2 | ب | استنتج أن : $\frac{x^2}{2}\le e^{-x}+x-1\le\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\ ;\ (\forall x\ge 0)$

0,50 ن | II | 3 | أ | تحقق أن : $f(x)\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right)=\frac{f(x)-1}{x}\ ;\ (\forall x>0)$

0,75 ن | II | 3 | ب | استنتج أن : $\frac{1}{2}=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right)$. ثم أوّل النتيجة المحصل عليها .

0,75 ن	أ 4 II	بين أن الدالة f قابلة للإشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. و أن : $(\forall x>0)\ ;\ f'(x)=\dfrac{e^x(e^x-1-x)}{(e^x-1)^2}$
0,50 ن	ب 4 II	استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$.
	III	الجزء الثالث : نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_{n+1}=\ln\big(f(u_n)\big)\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0>0 \end{cases}$
0,50 ن	1 III	بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n>0$.
0,50 ن	2 III	بين أن $(u_n)_{n\geq 0}$ متتالية تناقصية قطعا ثم استنتج أنها متقاربة.
0,50 ن	3 III	بين أن 0 هو الحل الوحيد للمعادلة $\ln(f(x))=x$. ثم حدد النهاية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

●●● التمرين الخامس : (3,0 ن)

نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $I=]0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x)=\int_{\ln 2}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\right)dt$$

0,50 ن	أ 1	أدرس إشارة $F(x)$ لكل x من المجال I .
0,50 ن	ب 1	بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال I . و احسب $F'(x)$ لكل x من I
0,25 ن	ج 1	بين أن الدالة F تزايدية قطعا على المجال I .
0,50 ن	أ 2	باستعمال تقنية تغيير المتغير و ذلك بوضع $u=\sqrt{e^t-1}$ ، بين أن : $(\forall x\epsilon I)\ ;\ \displaystyle\int_{\ln 2}^{x}\left(\frac{1}{\sqrt{e^t-1}}\right)dt=2\,Arctan\sqrt{e^x-1}-\frac{\pi}{2}$
0,50 ن	ب 2	أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to 0^+}F(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$
0,25 ن	أ 3	بين أن الدالة F تقابل من المجال I نحو مجالٍ J يتم تحديده.
0,50 ن	ب 3	حدد التقابل العكسي F^{-1} للتقابل F .

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي و تكوين الأطر والبحث العلمي
المركز الوطني للتقويم والامتحانات والتوجيه

الإمتحان الوطني الموحد لنيل شهادة البكالوريا
الدورة الاستدراكية 2016

مادة الرياضيات
شعبة العلوم الرياضية بمسلكيها (أ) و (ب)
مدة الانجاز 4h - المعامل 9

التمرين الأول : (3,0 ن)

لدينا صندوقان U و V . الصندوق U يحتوي على أربع كرات حمراء و أربع كرات زرقاء. الصندوق V يحتوي على كرتين حمراوين و أربع كرات زرقاء.

نعتبر التجربة التالية : نسحب عشوائيا كرة من الصندوق U ، إذا كانت حمراء نضعها في الصندوق V ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V. و إذا كانت زرقاء نضعها جانبا ثم نسحب عشوائيا كرة من الصندوق V .

نعتبر الأحداث التالية : R_U : " الكرة المسحوبة من الصندوق U حمراء "
B_U : " الكرة المسحوبة من الصندوق U زرقاء "
R_V : " الكرة المسحوبة من الصندوق V حمراء "
B_V : " الكرة المسحوبة من الصندوق V زرقاء "

0,50 ن	1		أحسب احتمال كل من الحدثين R_U و B_U .
0,50 ن	2	أ	أحسب احتمال الحدث B_V علما أن الحدث R_U محقق.
0,50 ن	2	ب	أحسب احتمال الحدث B_V علما أن الحدث B_U محقق.
1,00 ن	3		بين أن احتمال الحدث B_V هو $\frac{13}{21}$.
0,50 ن	4		استنتج احتمال الحدث R_V .

التمرين الثاني : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية وحدتها $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&0\end{pmatrix}$.
و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

لكل عدد عقدي $z=x+iy$ حيث $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

نضع $M(z)=\begin{pmatrix}x+2y&0&5y\\0&1&0\\-y&0&x-2y\end{pmatrix}$.

و نعتبر المجموعة E التالية : $E=\{\,M(z)\ ;\ z\in\mathbb{C}\,\}$.

نزود المجموعة E بقانون التركيب الداخلي $*$ المعرف بما يلي :

$$\left.\begin{array}{l}\forall z\in\mathbb{C}\\ \forall z'\in\mathbb{C}\end{array}\right| \ ;\ M(z)*M(z')=M(z)+M(z')-M(0)$$

1,00 ن	1		بين أن $(E,*)$ زمرة تبادلية.
	2		نعتبر التطبيق : $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathbb{C}^* & \longmapsto & E\\ z & \longmapsto & M(z)\end{array}$
1,00 ن	2	أ	بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.
0,50 ن	2	ب	استنتج أن $(E-\{M(0)\},\times)$ زمرة تبادلية.
1,00 ن	3		بين أن $(E,*,\times)$ جسم تبادلي.

التمرين الثالث : (3,5 ن)

	1 نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة : $(E):\ z^2-(1+\sqrt{3})(1+i)z+4i=0$
0,50 ن	**1** أ تحقق أن مميز المعادلة (E) هو $\Delta=\left((\sqrt{3}-1)(1-i)\right)^2$.
1,00 ن	**1** ب أكتب على الشكل المثلثي حلي المعادلة (E) .
	2 المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. نعتبر A و B ذواتا اللحقين $a=1+i\sqrt{3}$ و $b=\sqrt{3}+i$ على التوالي.
0,75 ن	**2** أ بين أن $(\mathcal{D})$ مجموعة النقط من المستوى العقدي التي لحقها $z=\frac{1}{2}a\bar{z}$ هي مستقيم يمر من النقطة B .
0,50 ن	**2** ب لتكن M و M' نقطتان لحقاهما على التوالي z و z' بحيث $z'=a\bar{z}-b$ و $z\neq b$. بين أن : $\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)}=\frac{2}{\lvert z-b\rvert^2}$
0,75 ن	**2** ج استنتج أن المستقيم (D) هو منصف الزاوية $\left(\overrightarrow{BM},\overrightarrow{BM'}\right)$

التمرين الرابع : (6,5 ن)

	لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، نعتبر الدالة العددية f_n المعرفة على $]0,+\infty[$ بما يلي : $f_n(x)=\ln x-\frac{n}{x}$ و ليكن $(\mathcal{C}_n)$ المنحنى الممثل للدالة f_n في م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.
0,75 ن	**1** أ أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C}_n)$.
0,75 ن	**1** ب أدرس تغيرات الدالة f_n على المجال $]0,+\infty[$ ثم اعطا جدول تغيراتها.
0,50 ن	**1** ج أنشئ المنحنى $(\mathcal{C}_2)$.
0,50 ن	**2** بين أن الدالة f_n تقابل من $]0,+\infty[$ نحو $\mathbb{R}$.
0,50 ن	**3** أ بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ ، يوجد عدد حقيقي وحيد α_n من المجال $]0,+\infty[$ حيث $f_n(\alpha_n)=0$.
0,50 ن	**3** ب قارن $f_n(x)$ و $f_{n+1}(x)$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$.
0,50 ن	**3** ج بين أن المتتالية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ تزايدية قطعا.
0,50 ن	**4** أ بين أن : $(\forall x>0)\ ;\ \ln x<x$
0,50 ن	**4** ب بين أن : $\lim_{n\infty}(\alpha_n)=+\infty$
	5 لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n ، نضع : $I_n=\frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}}f_n(x)\,dx$
0,50 ن	**5** أ بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*),(\exists\ c_n\ \epsilon\ [\alpha_n\ ,\alpha_{n+1}])\ :\ I_n=f_n(c_n)$
0,50 ن	**5** ب بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ 0\leq I_n\leq\frac{1}{\alpha_{n+1}}$
0,50 ن	**5** ج حدد النهاية : $\lim_{n\infty}(I_n)$

التمرين الخامس : (3,5 ن)

ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 2 .

نعتبر الدالة العددية g_n ذات المجهول x المعرفة على المجال $[n,+\infty[$ بما يلي :

$$g_n(x) = \int_n^x \left(\frac{1}{\ln t}\right) dt$$

0,50 ن | 1 | أ | بين أن g_n قابلة للاشتقاق على $[n,+\infty[$. ثم حدد دالتها المشتقة الأولى g_n' .

0,25 ن | 1 | ب | بين أن الدالة g_n تزايدية قطعا على المجال $[n,+\infty[$.

0,50 ن | 2 | أ | بين أن : $(\forall x \geq n)\ ;\ g_n(x) \geq \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$

(يمكنك استعمال المتفاوتة التالية : $(\forall t \geq 0)\ ;\ \ln(1+t) \leq t$).

0,25 ن | 2 | ب | استنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$

0,25 ن | 3 | أ | بين أن g_n تقابل من $[n,+\infty[$ نحو $[0,+\infty[$.

0,50 ن | 3 | ب | استنتج أن : $(\forall n \geq 2),(\exists!\ u_n \geq n)\ :\ \int_n^{u_n} \left(\frac{1}{\ln t}\right) dt = 1$

4 | نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 2}$ المعرفة في السؤال 3) ب) .

0,50 ن | 4 | أ | بين أن : $(\forall n \geq 2)\ ;\ \int_{u_n}^{u_{n+1}} \left(\frac{1}{\ln t}\right) dt = \int_n^{n+1} \left(\frac{1}{\ln t}\right) dt$

0,50 ن | 4 | ب | استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\geq 2}$ تزايدية قطعا.

0,25 ن | 4 | ج | حدد النهاية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها المصفوفة $\mathcal{O}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. و أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي.

نضع : $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{pmatrix}$. و لكل (a,b) من $\mathbb{R}^2$: $M(a,b)=\begin{pmatrix}a&b&-b\\0&0&0\\b&-a&a\end{pmatrix}$.

نعتبر المجموعة : $E=\{M(a,b)\ ;\ (a,b)\in\mathbb{R}^2\}$.

0,50 ن — 1) بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

2) نعرف على $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي $\top$ بما يلي :

$$\forall\,(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4\ ;\ M(a,b)\top M(c,d)=M(a,b)\times A\times M(c,d)$$

0,50 ن — تحقق أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\top)$.

3) ليكن φ التطبيق من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* الذي يربط كل عدد عقدي غير منعدم $a+ib$ حيث $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ ، بالمصفوفة $M(a,b)$ من E^*.

0,75 ن — 3) أ) تحقق أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\top)$. و أن : $\varphi(\mathbb{C}^*)=E^*$. حيث $E^*=E\setminus\{M(0,0)\}$.

0,75 ن — 3) ب) استنتج أن $(E^*,\top)$ زمرة تبادلية ينبغي تحديد عنصرها المحايد J .

0,50 ن — 4) أ) بين أن قانون التركيب الداخلي $\top$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E .

0,50 ن — 4) ب) استنتج أن $(E,+,\top)$ جسم تبادلي.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

I) ليكن m عددا عقديا غير منعدم. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة E التالية : $(E):\ 2z^2-2(m+1+i)z+m^2+(1+i)m+i=0$

0,50 ن — I) 1) تحقق أن مميز المعادلة (E) هو : $\Delta=(2im)^2$.

0,50 ن — I) 2) حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E) .

II) المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$. نفترض أن $m\in\mathbb{C}\setminus\{0;1;i\}$

و نضع : $z_1=\left(\frac{1+i}{2}\right)(m+1)$ و $z_2=\left(\frac{1-i}{2}\right)(m+i)$.

نعتبر النقط $A(1)$ و $B(i)$ و $M(m)$ و $M_1(z_1)$ و $M_2(z_2)$.

0,25 ن — II) 1) أ) تحقق أن : $z_1=iz_2+1$.

0,50 ن — II) 1) ب) بين أن M_1 هي صورة M_2 بالدوران r ذو المركز $\Omega\left(\frac{1+i}{2}\right)$ و الزاوية $\frac{\pi}{2}$.

0,50 ن — II) 2) أ) تحقق أن : $\left(\frac{z_2-m}{z_1-m}\right)=i\left(\frac{m-1}{m-i}\right)$

0,50 ن — II) 2) ب) بين أنه إذا كانت النقط M و M_1 و M_2 مستقيمية فإن M تنتمي إلى الدائرة (Γ) التي أحد أقطارها $[AB]$.

0,75 ن — II) 2) ج) حدد مجموعة النقط M بحيث تكون النقط Ω و M و M_1 و M_2 متداورة.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نقبل أن 2017 عدد أولي و أن : $2016 = 2^5 \times 3^2 \times 7$.

ليكن p عددا أوليا أكبر من أو يساوي 5 .

1 ليكن الزوج (x,y) من $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ بحيث : $px + y^{p-1} = 2017$.

- **1 أ** تحقق من أن : $p < 2017$. (0,25 ن)
- **1 ب** بين أن العدد p لا يقسم العدد y . (0,50 ن)
- **1 ج** بين أن : $y^{p-1} \equiv 1[p]$. ثم استنتج أن العدد p يقسم العدد 2016 . (0,75 ن)
- **1 د** بين أن : $p = 7$. (0,50 ن)

2 حدد حسب قيم p ، الأزواج (x,y) من $\mathbb{N}^{2*}$ التي تحقق $px + y^{p-1} = 2017$. (1,00 ن)

التمرين الرابع : (10,0 ن)

I الجزء الأول : نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x) = \left(1 + \dfrac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} \quad ; \quad (\forall x > 0) \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

ليكن $(\mathcal{C})$ منحنى الدالة f في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. نأخذ : $\|\vec{\imath}\| = \|\vec{\jmath}\| = 2cm$.

- **I 1 أ** بين أن الدالة f متصلة على اليمين في الصفر. (0,25 ن)
- **I 1 ب** بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في 0. (0,50 ن)
- **I 1 ج** بين أن f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم احسب $f'(x)$; $(\forall x > 0)$. (0,50 ن)
- **I 2 أ** أحسب النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ ثم أوِّل مبيانيا النتيجة المحصل عليها. (0,50 ن)
- **I 2 ب** اعط جدول تغيرات الدالة f . (0,25 ن)
- **I 3 أ** بين أن المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل نقطة انعطاف I يتم تحديدها. (0,75 ن)
- **I 3 ب** أرسم المنحنى $(\mathcal{C})$. نأخذ $f(1) \approx 0{,}7$ و $4e^{-3} \approx 0{,}2$. (0,50 ن)

II الجزء الثاني : نعتبر الدالة العددية F المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي :

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt$$

- **II 1** بين أن الدالة F متصلة على المجال $]0,+\infty[$. (0,25 ن)
- **II 2 أ** باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء بين أن : (0,50 ن)

$$(\forall x > 0) \; ; \; \int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt = e^{-1} - x\, e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t}\, e^{\frac{-1}{t}}\right) dt$$

- **II 2 ب** حدد : $\displaystyle\int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{\frac{-1}{t}}\, dt$ لكل x من المجال $]0,+\infty[$. (0,25 ن)
- **II 2 ج** بين أن : $\displaystyle\int_0^1 f(x)\, dx = \frac{1}{e}$ (0,50 ن)
- **II 3** أحسب بالوحدة (cm^2) مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و المستقيمات ذات المعادلات : $x = 0$ و $x = 2$ و $y = 0$. (0,50 ن)

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\geq 0}$ المعرفة بما يلي : $u_n = F(n) - F(n+2)$		4	II	
باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي n يوجد عدد حقيقي v_n من المجال $]n\,,n+2[$ حيث: $u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}}$.	أ	4	II	0,50 ن
بين أن : $2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}} < u_n < 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}}$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$	ب	4	II	0,25 ن
استنتج قيمة النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$	ج	4	II	0,25 ن
الجزء الثالث :			III	
بين أنه لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n يوجد عدد حقيقي موجب قطعا وحيدا α_n بحيث : $f(\alpha_n) = e^{\frac{-1}{n}}$.	أ	1	III	0,50 ن
بين أن المتتالية العددية $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ تزايدية.	ب	1	III	0,25 ن
تحقق أن : $\frac{-1}{n} = \frac{-1}{\alpha_n} + \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)$; $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)$	ج	1	III	0,25 ن
بين أن : $1-t+t^2 \leq \frac{1}{1+t} \leq 1-t$; $(\forall\, t\,\epsilon\,[0,+\infty[\,)$	أ	2	III	0,25 ن
بين أن : $\frac{-x^2}{2}+\frac{x^3}{3} \leq -x+\ln(1+x) \leq \frac{-x^2}{2}$; $(\forall x \geq 0)$	ب	2	III	0,50 ن
ليكن n عددا صحيحا طبيعيا أكبر من أو يساوي 4 .		3	III	
تحقق أن $\alpha_4 \geq 1$ ثم استنتج أن $\alpha_n \geq 1$. نقبل أن : $e^{\frac{3}{4}} \geq 2$.	أ	3	III	0,50 ن
بين أن : $1 \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1 - \frac{2}{3\alpha_n}$ يمكنك استعمال 1)ج) و 2)ب) من الجزء III.	ب	3	III	0,50 ن
بين أن : $\alpha_n \leq \sqrt{\frac{n}{6}}$.يمكنك استعمال 3)أ) و 3)ب). و استنتج النهاية : $\lim\limits_{n\infty}(\alpha_n)$	ج	3	III	0,50 ن
حدد النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}\left(\alpha_n\sqrt{\frac{2}{n}}\right)$	د	3	III	0,50 ن

التمرين الأول : (4,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية غير تبادلية و غير كاملة.

نضع : $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ et $J=\begin{pmatrix}0&-3\\1&0\end{pmatrix}$ et $\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\;;\;M(x,y)=\begin{pmatrix}x&-3y\\y&x\end{pmatrix}$

نعتبر المجموعة : $E=\{\,M(x,y)\;/\;(x,y)\in\mathbb{R}^2\}$

0,75 ن — **1** بين أن E فضاء متجهي جزئي من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ بعده 2.

0,50 ن — **2** أ بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

0,75 ن — **2** ب بين أن $(E,+,\times)$ حلقة واحدية و تبادلية.

3 نضع $E^*=E\backslash M(0,0)$ و نعتبر التطبيق φ من $\mathbb{C}^*$ نحو E^* المعرف بما يلي :

$$\forall\,(x,y)\in\mathbb{R}^2\;;\;\varphi(x+iy)=M\left(x,\frac{y}{\sqrt{3}}\right)$$

0,75 ن — **3** أ بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E^*,\times)$.

0,50 ن — **3** ب استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

0,75 ن — **3** ج بين أن : $J^{2017}=\varphi\left(3^{1008}\sqrt{3}\,i\right)$. ثم حدد مقلوب المصفوفة J^{2017} في $(E^*,\times)$.

0,50 ن — **4** بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

يحتوي كيس على $2n$ كرة $(n\in\mathbb{N}^*)$ ، منها n كرة بيضاء و n كرة سوداء.
جميع الكرات لا يمكن التمييز بينها باللمس. تقتضي لعبة سحب كرة واحدة من الكيس و تسجيل لونها و إعادتها إلى الكيس ثم سحب كرة أخرى من نفس الكيس و تسجيل لونها كذلك.

- إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أبيض، نربح 20 نقطة.
- إذا كان لون الكرتين المسحوبتين أسود، نخسر 20 نقطة.
- إذا كانت الكرتان المسحوبتان مختلفي اللون، يكون الربح منعدم.

0,75 ن — **1** أحسب احتمال ربح 20 نقطة و احتمال خسارة 20 نقطة و احتمال تحقيق ربح منعدم.

2 نعيد اللعبة السابقة خمس مرات.

0,50 ن — **2** أ أحسب احتمال ربح 100 نقطة.

1,00 ن — **2** ب أحسب احتمال ربح 40 نقطة.

3 خلال لعبة واحدة، نعتبر المتغير العشوائي X الذي يأخذ فقط القيم -20 عند الخسارة و صفر عندما يكون الربح منعدما و $+20$ عند الربح.

0,50 ن | 3 أ | حدد قانون احتمال المتغير العشوائي X .

0,25 ن | 3 ب | أحسب الأمل الرياضي للمتغير العشوائي X .

التمرين الثالث : (2,5 ن)

المستوى العقدي منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر $(O,\vec{e_1},\vec{e_2})$.

لتكن M نقطة لحقها العدد العقدي الغير منعدم z و M' النقطة التي لحقها z'

$$z' = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$$

0,50 ن | 1 | حدد العدد العقدي z لكي تكون النقطتان M و M' منطبقتين.

2 | نفترض أن M تخالف النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي 1 و -1 .

0,50 ن | 2 | بين أن : $\dfrac{z'+1}{z'-1} = \left(\dfrac{z+1}{z-1}\right)^2$

3 | ليكن (Δ) واسط القطعة $[AB]$.

0,75 ن | 3 | بين أنه : إذا كانت M تنتمي إلى (Δ) فإن M' تنتمي إلى (Δ) .

4 | لتكن (Γ) الدائرة التي أحد أقطارها $[AB]$.

0,75 ن | 4 | بين أنه : إذا كانت M تنتمي إلى (Γ) فإن M' تنتمي إلى (AB) .

التمرين الرابع : (10,0 ن)

I | لتكن f الدالة العددية المعرفة على $I = [0,+\infty[$ بما يلي :

$$\begin{cases} \forall\, x \in\,]0,+\infty[\ :\quad f(x) = \dfrac{Arctan\, x}{x} \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

0,50 ن | I 1 | بين أن f متصلة على المجال I.

0,50 ن | I 2 أ | ليكن x من I ، بين أن : $\forall\, t \in [0,x]\ :\ \frac{1}{1+x^2} \leq \frac{1}{1+t^2} \leq 1$

0,50 ن | I 2 ب | بين أن : $\forall\, x \in [0,+\infty[\ :\ \frac{x}{1+x^2} \leq Arctan\, x \leq x$

0,75 ن | I 2 ج | بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.

0,50 ن | I 3 أ | علما أن f قابلة للاشتقاق على المجال $J =]0,+\infty[$ ، أحسب $f'(x)$ لكل $x\in J$.

0,25 ن | I 3 ب | أدرس تغيرات الدالة f على المجال I.

III	لتكن g الدالة العددية المعرفة على $I = [0,+\infty[$ بما يلي :
	$$\begin{cases} \forall\, x \in\,]0,+\infty[\ :\ \ g(x) = \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt \\ g(0) = 1 \end{cases}$$
0,50 ن	II 1 أ بين أن : $\forall\, x \in [0,+\infty[\ :\ f(x) \le g(x) \le 1$
0,75 ن	II 1 ب بين أن g قابلة للاشتقاق على اليمين في الصفر.
0,75 ن	II 2 بين أن الدالة g قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. و أن :
	$$\forall\, x \in\,]0,+\infty[\ :\ g'(x) = \frac{1}{x}(f(x) - g(x))$$
0,25 ن	II 3 بين أن الدالة g تناقصية على المجال I.
0,50 ن	II 4 أ بين أن : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = 0$. (لاحظ : $\forall x\in[0,+\infty[\,; 0 < Arctan\, x < \frac{\pi}{2}$)
0,75 ن	II 4 ب أحسب النهاية التالية : $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$
0,75 ن	III 1 بين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $[0,1]$.
0,50 ن	III 2 أ تحقق أن : $\forall\, x \in [0,+\infty[\ :\ \ 0 \le 1 - f(x) \le \frac{x^2}{1+x}$
	(يمكن استعمال نتيجة السؤال 2)ب) من الجزء الأول)
0,75 ن	III 2 ب بين أن : $\forall\, x \in\,]0,+\infty[\ :\ \ \lvert g'(x)\rvert \le \frac{1}{2}$
	III 3 لتكن $(u_n)_{n\ge0}$ المتتالية العددية المعرفة بما يلي : $\begin{cases} \forall n\in\mathbb{N}\ :\ \ u_{n+1} = g(u_n) \\ u_0 \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$
0,75 ن	III 3 أ بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ \lvert u_{n+1} - \alpha\rvert \le \frac{1}{2}\lvert u_n - \alpha\rvert$
0,75 ن	III 3 ب بين أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ متقاربة.

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathbb{C},+,\times)$ جسم تبادلي و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية

صفرها المصفوفة المنعدمة : $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي.

لكل زوج (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نضع $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix}$

و نعتبر المجموعة المعرفة بما يلي : $E = \{ M(x,y) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

1 — 0,25 ن — بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(M_2(\mathbb{R}),+)$.

2 أ — 0,25 ن — بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

2 ب — 0,50 ن — نضع $J = M(0,1)$ بين أن (I,J) أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$.

3 أ — 0,50 ن — بين أن E جزء مستقر من $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

3 ب — 0,50 ن — بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية.

4 — ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{C}^*$ نحو $M_2(\mathbb{R})$ بما يلي :

$$\begin{array}{llll} \varphi : & \mathbb{R}^2 - \{(0,0)\} & \mapsto & E \\ & x+iy & \mapsto & M(x+y,-y) = \begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \end{array}$$

4 أ — 0,50 ن — بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\times)$.

4 ب — 0,50 ن — نضع : $E^* = E - \{\theta\}$. بين أن $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

4 ج — 0,25 ن — استنتج أن $(E^*,\times)$ زمرة تبادلية.

5 — 0,25 ن — بين أن $(E,+,\times)$ جسم تبادلي.

التمرين الثاني : (3,0 ن)

ليكن p عددا أوليا مكتوبا على الشكل $p = 4k+3$ حيث $k \in \mathbb{N}^*$.

1 — 0,50 ن — بين الإستلزام التالي : $(\forall x \in \mathbb{Z}) \ ; \ x^2 \equiv 1[p] \implies x^{p-5} \equiv 1[p]$

2 — ليكن x عددا صحيحا نسبيا يحقق : $x^{p-5} \equiv 1[p]$.

2 أ — 0,50 ن — بين أن x و p أوليان فيما بينهما.

0,50 ن | 2 ب | بين أن : $x^{p-1} \equiv 1[p]$

0,50 ن | 2 ج | تحقق أن : $2 + (k-1)(p-1) = k(p-5)$

0,50 ن | 2 د | استنتج أن : $x^2 \equiv 1[p]$

0,50 ن | 3 | حل في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة التالية : $x^{62} \equiv 1[67]$.

التمرين الثالث : (3,5 ن)

I | ليكن m عددا عقديا.

I | نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_m) ذات المجهول z التالية :

$$(E_m) \;:\; z^2 + (im+2)z + im + 2 - m = 0$$

0,25 ن | I 1 أ | تحقق أن : $\Delta = (im - 2i)^2$ هو مميز المعادلة (E_m).

0,50 ن | I 1 ب | اعط حسب قيم البارامتر العقدي m مجموعة حلول المعادلة (E_m).

0,50 ن | I 2 | من أجل $m = i\sqrt{2}$, أكتب حلي المعادلة (E_m) على الشكل الأسي.

II | المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

نعتبر في المستوى العقدي النقط المعرفة بألحاقها كما يلي :

$$A(a) \quad \Omega(\omega) \quad M(m) \quad M'(m') \;;\; avec : \left| \begin{array}{l} a = -1 - i \\ \omega = i \\ m \in \mathbb{C} \\ m' = -im - 1 + i \end{array} \right.$$

II 1 | ليكن $\mathcal{R}$ الدوران الذي زاويته $\frac{-\pi}{2}$ و يحول M إلى M' .

0,25 ن | II 1 أ | تحقق أن Ω هو مركز الدوران $\mathcal{R}$.

0,50 ن | II 1 ب | حدد b لحق النقطة B التي تحقق $A = \mathcal{R}(B)$.

0,50 ن | II 2 أ | تحقق أن : $(m' - a) = \left(\frac{\omega - a}{\omega - b}\right)(m - b)$

0,50 ن | II 2 ب | استنتج أن النقط A و M و M' تكون مستقيمية
إذا و فقط إذا كانت A و B و Ω و M متداورة.

0,50 ن | II 2 ج | بين أن مجموعة النقط M بحيث تكون النقط A و M و M' مستقيمية هي دائرة
يجب تحديد مركزها و شعاعها.

التمرين الرابع : (7,5 ن)

0,50 ن | I 1 أ | بين أن : $\forall\, x \in \,]0,+\infty[\;;\; \int_0^x \left(\frac{t}{1+t}\right) dt = x - \ln(1+x)$

0,50 ن | I 1 ب | باستعمال تقنية تغيير المتغير $u = t^2$ بين أن :

$$\forall\, x \in \,]0,+\infty[\;;\; \int_0^x \left(\frac{t}{1+t}\right) dt = \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{u}}\right) du$$

النقطة				
0,50 ن	I	1	ج	استنتج أن : $\forall x \in]0,+\infty[\;\; ; \;\; \frac{1}{2(1+x)} \le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$
0,25 ن	I	2		حدد النهاية التالية : $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}\right)$
	II			نعتبر الدالة العددية المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) \;\; ; \;\; x \neq 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$ و ليكن $(\mathcal{C})$ منحناها في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.
0,25 ن	II	1	أ	بين أن f دالة متصلة على اليمين في الصفر.
0,50 ن	II	1	ب	بين أن f قابلة للإشتقاق على اليمين في الصفر. يمكن استعمال $I)2)$
0,75 ن	II	1	ج	أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}\right)$ ثم أوّل مبيانيا النتيجة المحصل عليها.
0,50 ن	II	2	أ	بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $]0,+\infty[$. ثم تحقق أن : $\forall x \in]0,+\infty[\;\; ; \;\; f'(x) = \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$
0,25 ن	II	2	ب	استنتج أن الدالة f تزايدية قطعا على المجال $[0,+\infty[$.
0,25 ن	II	2	ج	تحقق أن : $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$.
0,50 ن	II	3		مثل مبيانيا المنحنى $(\mathcal{C})$ مبينا نصف المماس على يمين الصفر.
	III	1		نعتبر الدالة العددية g المعرفة على المجال $]0,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = f(x) - x$
0,50 ن	III	1	أ	بين أن : $(\forall x \in]0,+\infty[) \;\; ; \;\; 0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}$
0,50 ن	III	1	ب	استنتج أن g تناقصية قطعا على $]0,+\infty[$ ثم بين أن : $g(]0,+\infty[) =]-\infty,1[$.
0,25 ن	III	1	ج	بين أن المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا وحيدا α على المجال $]0,+\infty[$.
	III			ليكن a عددا حقيقيا من المجال $]0,+\infty[$.
	III	2		نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n\ge0}$ المعرفة بما يلي : $\begin{cases} u_n = f(u_n) \;\; ; \;\; \forall n \in \mathbb{N} \\ u_0 = a \end{cases}$
0,25 ن	III	2	أ	بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; ; \;\; u_n > 0$
0,50 ن	III	2	ب	بين أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; ; \;\; \lvert u_{n+1} - \alpha \rvert \le \frac{1}{2} \lvert u_n - \alpha \rvert$
0,50 ن	III	2	ج	بين بالترجع أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) \;\; ; \;\; \lvert u_n - \alpha \rvert \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \lvert a - \alpha \rvert$
0,25 ن	III	2	د	استنتج أن المتتالية $(u_n)_{n\ge0}$ تؤول إلى العدد α.

●●● التمرين الخامس : (2,5 ن)

النقطة			
			نعتبر الدالة F المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\, dt$
0,50 ن	1		بين أن الدالة F متصلة و تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$.
0,50 ن	2	أ	بين أن : $\forall x \in]0,+\infty[\;\; ; \;\; F(x) \ge x$. ثم استنتج النهاية : $\lim_{x\to+\infty} F(x)$
0,50 ن	2	ب	بين أن الدالة F فردية ثم استنتج النهاية التالية : $\lim_{x\to-\infty} F(x)$
0,50 ن	2	ج	بين أن F تقابل من $\mathbb{R}$ نحو $\mathbb{R}$.
0,50 ن	2	د	بين أن دالة التقابل العكسي G للدالة F قابلة للاشتقاق في 0 ثم أحسب $G'(0)$.

التمرين الأول : (3,5 ن)

نذكر أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ حلقة واحدية صفرها المصفوفة $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

و وحدتها المصفوفة $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

و أن $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ فضاء متجهي حقيقي بعده 4.

لكل زوج (x,y) من $\mathbb{R}^2$ نضع : $M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$.

و نعتبر المجموعة المعرفة بما يلي : $E = \{ M(x,y) \ ; \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \}$

| 1 | | 0,50 ن | بين أن E زمرة جزئية للزمرة $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

| 2 | أ | 0,50 ن | بين أن E فضاء متجهي جزئي للفضاء المتجهي $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

| 2 | ب | 0,25 ن | بين أن بُعدَ الفضاء المتجهي الحقيقي $(E,+,\cdot)$ هو 2.

| 3 | أ | 0,25 ن | بين أن E مستقر بالنسبة للقانون $\times$.

| 3 | ب | 0,50 ن | بين أن $(E,+,\times)$ حلقة تبادلية.

| 4 | | | نعرف في المجموعة $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ قانون التركيب الداخلي $\top$ بما يلي :

$$\left| \begin{array}{l} \forall \ M(x,y) \, , M(x',y') \ \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M(x,y) \top M(x',y') = M(x,y) \times M(x',y') - M(y,0) \times M(y',0) \end{array} \right.$$

ليكن φ التطبيق المعرف من $\mathbb{C}^*$ نحو E بما يلي : $\begin{array}{rcl} \varphi : \ \mathbb{C}^* & \longmapsto & E \\ x+iy & \longmapsto & M(x,y) \end{array}$

| 4 | أ | 0,25 ن | بين أن E مستقر بالنسبة للقانون $\top$.

| 4 | ب | 0,25 ن | بين أن φ تشاكل من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(E,\top)$.

| 4 | ج | 0,25 ن | نضع : $E^* = E - \{\theta\}$. بين أن $(E^*,\top)$ زمرة تبادلية.

| 5 | أ | 0,50 ن | بين أن القانون $\top$ توزيعي بالنسبة للقانون $+$ في E.

| 5 | ب | 0,25 ن | بين أن $(E,+,\top)$ جسم تبادلي.

التمرين الثاني : (3,5 ن)

| 1 | | | لكل عدد عقدي $z \in \mathbb{C} - \{i\}$ نضع : $h(z) = i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)$

| 1 | أ | 0,50 ن | بين التكافؤ التالي : $h(z) = z \ \Leftrightarrow \ z^2 - 2iz - 2 = 0$

| 1 | ب | 0,50 ن | حل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E) : \ z^2 - 2iz - 2 = 0$

| 2 | | | المستوى العقدي منسوب إلى م م م م $(O,\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.

نرمز بـ a و b لحلي المعادلة (E) حيث $\mathcal{R}e(a) = 1$.

و لكل $z \in \mathbb{C} - \{i,a,b\}$ نعتبر النقط: $M(z)$ و $M'(h(z))$ و $A(a)$ و $B(b)$

| 2 | أ | 0,75 ن | بين أن : $\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right) = -\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$

0,75 ن	2 ب استنتج أن : $\left(\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}\right) \equiv \pi + \left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)\ [2\pi]$
0,50 ن	3 أ بين أنه إذا كانت النقط M و A و B مستقيمية فإن M و A و B و M' مستقيمية.
0,50 ن	3 ب بين أنه إذا كانت النقط M و A و B غير مستقيمية فإن M و A و B و M' متداورة.

التمرين الثالث : (3,0 ن)

نرمي قطعة نقدية غير مغشوشة في الهواء 10 مرات متوالية .

ليكن X المتغير العشوائي الذي يربط كل نتيجة ممكنة بتردد ظهور الوجه (pile) :

أي عدد مرات الحصول على الوجه (pile) مقسوم على 10.

1,00 ن	1 أ حدد القيم الممكنة للمتغير العشوائي X.
1,00 ن	1 ب أحسب احتمال الحدث $\left[X = \frac{1}{2}\right]$.
1,00 ن	2 ما هو احتمال الحدث $\left[X \geq \frac{9}{10}\right]$

التمرين الرابع : (10,0 ن)

لتكن f الدالة المعرفة على المجال $[0,+\infty[$ بما يلي : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x}(\ln x)^2 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

و ليكن $(\mathcal{C})$ منحناها في م م م $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$.

0,50 ن	1 أ بين أن الدالة f متصلة على اليمين في الصفر. لاحظ أن : $f(x) = \left(4\, x^{\frac{1}{4}} \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$
0,75 ن	1 ب أحسب النهايتين : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ ثم أوِّل مبيانيا النتيجة المحصل عليها.
0,75 ن	2 أ أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في الصفر ثم أوِّل مبيانيا النتيجة المحصل عليها.
0,75 ن	2 ب بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق على $]0,+\infty[$ ثم احسب $f'(x)$ لكل $x > 0$.
1,00 ن	2 ج أدرس تغيرات الدالة f على المجال $[0,+\infty[$. ثم استنتج أن : $(\forall\, x \in [0,1]) \ ;\ 0 \leq \sqrt{x}(\ln x)^2 \leq \left(\frac{4}{e}\right)^2$
0,50 ن	2 د أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$. (نأخذ : $\|\vec{\imath}\| = 2cm$)
	3 لكل $x \geq 0$ نضع $F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt$.
0,50 ن	3 أ بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على المجال $[0,+\infty[$.
1,00 ن	3 ب أحسب $F'(x)$ لكل $x \geq 0$ و استنتج رتابة الدالة F على المجال $[0,+\infty[$.
0,75 ن	4 أ باستعمال طريقة المكاملة بالأجزاء، أحسب لكل $x > 0$ التكامل التالي $\int_x^1 \sqrt{t}(\ln t)dt$
0,75 ن	4 ب بين أن : $\forall\, x > 0 \ ;\ F(x) = \frac{-2}{3}x\sqrt{x}(\ln x)^2 + \frac{8}{9}x\sqrt{x}\ln x - \frac{16}{27}x\sqrt{x} + \frac{16}{27}$
1,00 ن	4 ج استنتج مساحة الحيز المستوي المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و المستقيمات المعرفة بالمعادلات التالية : $x = 0$ و $y = 0$ و $x = 1$.
	5 لكل عدد صحيح طبيعي غير منعدم n نضع : $u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)dx$
1,00 ن	5 أ بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ محدودة و رتيبة قطعا.
0,75 ن	5 ب بين أن المتتالية $(u_n)_{n\geq1}$ متقاربة ثم احسب نهايتها $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

المملكة المغربية
وزارة التربية الوطنية و التعليم العالي
و تكوين الأطر و البحث العلمي
المركز الوطني للتقويم و الامتحانات و التوجيه

التمرين الأول : (3,5 ن)

نعتبر المجال $G = [0,1[$.

ليكن $*$ التطبيق من $G \times G$ نحو $\mathbb{R}$ بما يلي : $a * b = a + b - E(a+b)$.

حيث $E(x)$ هو الجزء الصحيح للعدد الحقيقي x .

1. (0,75 ن) بين أن $*$ قانون تركيب داخلي في المجموعة G .
2. (0,75 ن) بين أن القانون $*$ تبادلي و تجميعي في المجموعة G .
3. (0,50 ن) بين أن $*$ يقبل عنصرا محايدا في المجال G وجب تحديده.
4. (0,50 ن) بين أن كل عنصر a من G يقبل مماثلا a' بالنسبة للقانون $*$. (ينبغي تحديده).
5. (1,00 ن) ليكن $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. حُل في G المعادلة التالية : $(F) : \underbrace{x * x * \cdots * x}_{n \text{ fois le } x} = \frac{1}{n}$

التمرين الثاني : (4,0 ن)

يتكون هذا التمرين من جزئين مستقلين.

I الجزء الأول : نعتبر في $\mathbb{C}$ المعادلة التالية : $(E_\theta) : z^2 - 2iz - (1 + e^{2i\theta}) = 0$

حيث θ بارامتر حقيقي من المجال $\left]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

1. (0,50 ن) ليكن $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. بين القاعدتين التاليتين :

$$e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \quad \text{و} \quad e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

2. (0,50 ن) حُل في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة (E_θ) ثم اكتب الحلين z_1 و z_2 على الشكل المثلثي.
3. (0,50 ن) لتكن A و B النقطتين اللتين لحقاهما على التوالي z_1 و z_2 .
   - أ (0,50 ن) بين أن النقط O و A و B غير مستقيمية و أن المثلث OAB قائم الزاوية.
   - ب (0,50 ن) ما قيمة θ التي من أجلها يكون المثلث OAB متساوي الساقين رأسه O ؟

II الجزء الثاني : نعتبر النقطتين A و B اللتين لحقاهما على التوالي a و $(b+i)$.

حيث $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ و ليكن r الدوران الذي مركزه A و زاويته $\frac{\pi}{3}$.

و النقطة B' هي صورة B بالدوران r .

1. (0,50 ن) اعط الكتابة العقدية للدوران r ثم احسب $aff(B')$ بدلالة a و b .
2. (0,50 ن) بين التكافؤ التالي : $a + b = \sqrt{3} \iff B' \in (Oy)$.

ثم عبِّر في هذه الحالة عن $aff(B')$ بدلالة a .

3. نفترض فيما يلي أن $a = \sqrt{3}$ و $b = 0$ و لتكن C و D النقطتين

ذَوَاتا اللحقين $c = -i$ و $d = 2 + \sqrt{3}(1-2i)$ على التوالي .

   - أ (0,50 ن) ما هي طبيعة كل من المثلثين ABC و ACD ؟
   - ب (0,50 ن) نضع $E = r(D)$ و لتكن F صورة D بالإزاحة ذت المتجهة $\overrightarrow{AC}$.

حدد لحقي النقطتين E و F ثم بين أن المثلث BEF متساوي الأضلاع.

التمرين الثالث : (2,5 ن)

1 نعتبر في المجموعة $\mathbb{Z}$ المعادلة (E) التالية : $(E): \quad ax \equiv 1[p]$
حيث a عنصر من المجموعة : $A_p = \{1,2,\cdots,(p-1)\}$.
و p عدد أولي أكبر من أو يساوي 3 .

0,50 ن — 1 أ بين أن العدد a^{p-2} حل للمعادلة (E) .

0,50 ن — 1 ب ليكن r باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{p-2} على العدد p.
بين أن $r \in A_p$ و أن r هو الحل الوحيد للمعادلة (E) في المجموعة A_p .

0,50 ن — 2 أ فيما يلي نعتبر أن $p = 31$. حدد قيمتي r حيث $a = 2$ ثم $a = 3$.

0,50 ن — 2 ب حل في $\mathbb{Z}$ المعادلتين التاليتين : $(F_2): 3x \equiv 1[31]$ و $(F_1): 2x \equiv 1[31]$.

0,50 ن — 2 ج إستنتج مجموعة حلول المعادلة : $(F): 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$ في $\mathbb{Z}$.

التمرين الرابع : (10,0 ن)

I الجزء الأول : لتكن h الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $h(x) = e^x - (x+1)$.

0,50 ن — I 1 بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) \; ; \; e^x = 1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt$

0,50 ن — I 2 حدد منحى تغيرات الدالة h على كل من المجالين $[0,+\infty[$ و $]-\infty,0]$.

0,50 ن — I 3 بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \; ; \; \dfrac{1}{2} \leq \dfrac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{h(x)}{x}$

يمكنك أن تبين أولاً أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) \; ; \; 0 \leq \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt \leq x\,h(x)$

0,50 ن — I 4 بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*) \; ; \; \dfrac{1}{2} + \dfrac{h(x)}{x} \leq \dfrac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \dfrac{1}{2}$

يمكنك أن تبين أولاً أن : $(\forall x \in \mathbb{R}_-^*) \; ; \; x\,h(x) \leq \displaystyle\int_0^x h(t)\,dt \leq 0$

0,50 ن — I 5 أحسب النهاية : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)}{x}\right)$ ثم استنتج النهاية : $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-(x+1)}{x^2}\right)$

II الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^*) \; : \; f(x) = \frac{x}{e^x - 1} \quad et \quad f(0) = 1$$

0,25 ن — II 1 بين أن الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

0,50 ن — II 2 أدرس الفرعين اللانهائيين للمنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$ و $-\infty$.

0,50 ن — II 3 بين أن f قابلة للاشتقاق في الصفر.

0,50 ن — II 4 بين أن : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) \; ; \; f'(x) = \frac{\varphi(x)}{(e^x-1)^2}$ حيث : $\varphi(x) = (1-x)e^x - 1$.

0,50 ن — II 5 أدرس تغيرات الدالة φ على $\mathbb{R}$ و استنتج إشارتها على $\mathbb{R}^*$.

0,25 ن — II 6 ضع جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن — II 7 أرسم المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ في المعلم $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ مبرزا المماس في النقطة ذات الأفصول 0

	III الجزء الثالث : لتكن $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ المتتالية المعرفة بـ : $(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ :\ u_{n+1}=f(u_n)\quad et\quad u_0=1$
0,50 ن	III 1 بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $\mathbb{R}$ ينبغي تحديده
0,50 ن	III 2 أ بين أن : $(\forall\ x\ \epsilon\ ]0,+\infty[\ )\ ;\ f'(x)+\frac{1}{2}=\frac{e^{2x}-2x\ e^x-1}{2(e^x-1)^2}$
0,50 ن	III 2 ب بين أن : $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^+)\ ;\ e^{2x}-2xe^x-1\geq 0$ ثم استنتج أن : $\frac{-1}{2}\leq f'(x)<0$
0,50 ن	III 3 أ بين أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \lvert u_{n+1}-\alpha\rvert\leq\frac{1}{2}\lvert u_n-\alpha\rvert$.
0,50 ن	III 3 ب استنتج أن : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \lvert u_n-\alpha\rvert\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(1-\alpha)$. و حدد النهاية التالية : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$
	IV الجزء الرابع : لتكن F الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي : $$F(x)=\int_x^{2x}f(t)\,dt$$
0,50 ن	IV 1 بين أن : $(\forall x\geq 0)\ ;\ 0\leq F(x)\leq xf(x)$. ثم استنتج النهاية : $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$
0,50 ن	IV 2 بين أن : $(\forall x\leq 0)\ ;\ F(x)\leq xf(x)$. ثم استنتج النهايتين : $$\lim_{x\to-\infty}\frac{F(x)}{x}\qquad et\qquad \lim_{x\to-\infty}F(x)$$
0,50 ن	IV 3 بين أن الدالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و أن : $$\begin{cases}F'(x)=\dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}\quad ;\quad \forall x\epsilon\mathbb{R}^*\\ F'(0)=1\end{cases}$$
0,50 ن	IV 4 ضع جدول تغيرات الدالة F ثم ارسم المنحنى $(\mathcal{C}_F)$ في م م م $(,\vec{\imath},\vec{\jmath})$. نعطي : $\ln 3\approx 1{,}1$ و $F(\ln 3)\approx 0{,}44$.

التمرين الأول : (5,5 ن)

المستوى العقدي $(\mathcal{P})$ منسوب إلى م م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر النقطة A ذات اللحق $a = \frac{2}{\sqrt{3}}$. نربط كل نقطة M ذات اللحق $z = x + iy$

حيث $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ بالنقطة M' ذات اللحق $z' = \frac{\sqrt{3}}{2} + iy$.

و نعتبر المجموعة : $E = \{ M(x,y) \in (\mathcal{P})\ ;\ \sqrt{3}\cdot MA = 2\cdot MM' \}$

1 (0,50 ن) بين أن : $E = \{ M(x,y) \in (\mathcal{P})\ ;\ (x,y) \in \mathbb{R}^2\ et\ x^2 - 3y^2 = 1 \}$.

2 نضع $f(x) = \sqrt{\frac{x^2-1}{3}}$ و $(\mathcal{C}_f)$ المنحنى الممثل للدالة f في م م م $(O,\vec{u},\vec{v})$.

- أ (0,50 ن) حدد $\mathcal{D}_f$ مجموعة تعريف الدالة f و تحقق أن f دالة زوجية.
- ب (0,50 ن) أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة ذات الأفصول 1 .
- ج (0,50 ن) حدد مقارب المنحنى $(\mathcal{C}_f)$ بجوار $+\infty$.
- د (0,75 ن) بين أن : $E = (\mathcal{C}_f) \cup (\mathcal{C}_{-f})$. ثم أنشئ المجموعة E .

3 لكل نقطتين $M(a+ib)$ و $M(c+id)$ حيث a و b و c و d أعداد حقيقية .

نضع : $M(a+ib) \top M(c+id) = M\big(ac + 3bd + i(ad+bc)\big)$

- أ (1,00 ن) بين أن القانون $\top$ تجميعي .
- ب (0,75 ن) بين أن $(E,\top)$ جزء مستقر من $(\mathcal{P},\top)$.
- ج (1,00 ن) بين أن $(E,\top)$ زمرة. هل هي تبادلية ؟ علل جوابك .

التمرين الثاني : (4,5 ن)

1 نعتبر في $\mathbb{Z}$ المعادلة : $(E) : 109x - 226y = 1$

- أ (0,50 ن) حدد القاسم المشترك الأكبر للعددين 109 و 226 .
  و استنتج أن (E) قابلة للحل في $\mathbb{Z}^2$.
- ب (0,50 ن) بين أن مجموعة حلول (E) هي مجموعة الأزواج $(141 + 226k\,;68 + 109k)$
  حيث k عدد صحيح نسبي .
- ج (0,75 ن) استنتج أنه يوجد عدد صحيح طبيعي غير منعدم وحيد d أصغر من أو يساوي
  226 و عدد صحيح طبيعي غير منعدم وحيد e حيث $109d = 1 + 226e$.
  (يجب تحديد قيمتي d و e)

2 (0,50 ن) بين أن العدد 227 أولي .

3 نضع : $A = \{0;1;2;\cdots;226\}$. و نعتبر التطبيقين f و g المعرفين من A نحو A

بما يلي : $f(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{109} على العدد 227 .

$g(a)$ هو باقي القسمة الأقليدية للعدد a^{141} على العدد 227 .

- أ (0,50 ن) تحقق أن : $g(f(0)) = 0$.
- ب (0,50 ن) بين أن : $\forall\, a \in A \setminus \{0\}\ ;\ a^{226} \equiv 1[227]$.
- ج (0,75 ن) بين أن : $\forall\, a \in A\ ;\ g(f(a)) = f(g(a)) = a$.
- د (0,50 ن) ماذا يمكن أن نستنتج بخصوص الدالتين f و g .

التمرين الثالث : (3,0 ن)

1 نضع : $(\forall p \in \mathbb{N}^*)\ ;\ I_p = \int_1^e x^2 (\ln x)^p\, dx$

0,50 ن — 1 أ أحسب التكامل I_1 .

0,50 ن — 1 ب بين أن : $(\forall p \in \mathbb{N}^*)\ ;\ I_{p+1} = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3}\right) I_p$

0,50 ن — 1 ج استنتج قيمتي التكاملين I_2 و I_3 .

0,50 ن — 2 أ بين أن المتتالية $\left(I_p\right)_{p\geq 0}$ تناقصية.

0,50 ن — 2 ب بين أن المتتالية $\left(I_p\right)_{p\geq 0}$ متقاربة.

0,50 ن — 2 ج بين أن : $\lim_{p\to+\infty} I_p = 0$

التمرين الرابع : (7,0 ن)

I لتكن g الدالة العددية للمتغير الحقيقي x المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي : $g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$

0,50 ن — I 1 أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to(-1)^+} g(x)$ و $\lim_{x\to+\infty} g(x)$

0,50 ن — I 2 اعط جدول تغيرات الدالة g .

0,50 ن — I 3 بين أنه يوجد عنصر وحيد α من $]0,+\infty[$ حيث : $g(\alpha) = 0$ و $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

0,50 ن — I 4 حدد إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.

II الجزء الثاني : نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $]-1,+\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

و ليكن $(\mathcal{C})$ المنحنى الممثل لـ f في المستوى المنسوب إلى م م م $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1,00 ن — II 1 أحسب النهايتين التاليتين : $\lim_{x\to(-1)^+} fx)$ و $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

II 2 لتكن f' الدالة المشتقة للدالة f على المجال $]-1,+\infty[$.

0,50 ن — II 2 أ بين أن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على المجال $]-1,+\infty[$.
ثم اعط جدول تغيرات الدالة f .

0,50 ن — II 2 ب بين أن : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$

1,00 ن — II 3 أنشئ المنحنى $(\mathcal{C})$. (نأخذ $\alpha \approx 0,7$ و $f(\alpha) \approx 0,4$).

III الجزء الثالث : نعتبر التكامل التالي : $I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\, dx$

1,00 ن — III 1 أحسب التكامل I. (يمكنك وضع : $t = \frac{\pi}{4} - x$).

1,00 ن — III 2 أحسب بالوحدة cm^2 مساحة الحيز من المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{C})$ و محور الأفاصيل و المستقيمين ذوا المعادلتين $x = 0$ و $x = 1$.
(يمكنك وضع : $t = Arctan\ x$) .

★★★

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc

Ministère de l'Education Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Eseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session Principale
Juin 2019

Exercice Numéro 1 : (03,50 points)

On rappelle que $(\mathbb{C},+,\times)$ est un corps commutatif et que $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ est un anneau unitaire de zéro la matrice nulle $\theta = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ et d'unité la matrice $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur $\mathbb{C}$ par :

$(\forall (x,y)\epsilon\mathbb{R}^2)(\forall (a,b)\epsilon\mathbb{R}^2)\ :\ (x+iy)*(a+ib) = xa + i(x^2b + a^2y)$

0,25 **1 a** Montrer que la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

0,50 **1 b** Montrer que la loi $*$ est associative sur $\mathbb{C}$.

0,25 **1 c** Montrer que $*$ admet un élément neutre e que l'on déterminera.

0,25 **1 d** Soit $(x,y)\ \epsilon\ \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, Montrer que le nombre complexe $(x+iy)$ admet le nombre complexe $\left(\frac{1}{x} - \frac{y}{x^4}i\right)$ comme symétrique pour la loi $*$

2 On considère le sous-ensemble de $\mathbb{C}$: $E = \{\, x + iy\ \ ;\ \ x\,\epsilon\,\mathbb{R}_+^*\ ;\ y\,\epsilon\,\mathbb{R}\,\}$.

0,25 **2 a** Montrer que E est stable par la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

0,50 **2 b** Montrer que $(E,*)$ est un groupe commutatif.

3 On considère l'ensemble $G = \{\, 1 + iy\ \ ;\ \ y\,\epsilon\,\mathbb{R}\,\}$.

0,50 **3** Montrer que $(G,*)$ est un sous-groupe de $(E,*)$.

4 On considère l'ensemble $F = \left\{ M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}\ \ ;\ \ \middle|\ \begin{matrix} x\,\epsilon\,\mathbb{R}_+^* \\ y\,\epsilon\,\mathbb{R} \end{matrix} \right\}$.

0,25 **4 a** Montrer que F est stable pour la loi $*$ dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

4 b Soit φ l'application de E vers F qui, à tout nombre complexe $x+iy$ de E, fait correspondre la matrice $M(x^2,y) = \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix}$ de F.

0,50 **4 b** Montrer que φ est un isomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\times)$.

0,25 **4 c** En déduire que $(F,\times)$ est un groupe commutatif.

Exercice Numéro 2 : (03,50 points)

I Soit m un nombre complexe non réel $(m\,\epsilon\,\mathbb{C}\backslash\mathbb{R})$.

I 1 On considère dans $\mathbb{C}$, l'équation d'inconnue z définie par :

$$(E)\ :\ z^2 - (1+i)(1+m)z + 2im = 0\ .$$

0,25 **I 1 a** Montrer que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

0,50 **I 1 b** Déterminer $z_1\ et\ z_2$, les deux solutions de l'équation (E).

I 2 On suppose dans cette question que $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

0,50 **I 2 a** Déterminer le module et un argument de $(z_1 + z_2)$.

0,25	I	2	b	Montrer que si $z_1 z_2 \in \mathbb{R}$ alors $(z_1+z_2)=2i$.
	II			Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.
	II			On considère les points suivants :

- A le point d'affixe $a=(1+i)$.
- B le point d'affixe $b=(1+i)m$.
- C le point d'affixe $c=(1-i)$.
- D est l'image de B par la rotation $r\left(O,\frac{\pi}{2}\right)$
- Ω est le milieu du segment $[CD]$.

0,50	II	1	a	Montrer que l'affixe du point Ω est $\omega=\frac{(1-i)(1-m)}{2}$.
0,25	II	1	b	Calculer la quantité $\left(\frac{b-a}{\omega}\right)$.
0,50	II	1	c	En déduire que $(O\Omega)\perp(AB)$ et que $AB=2\,O\Omega$.
	II	2		La droite $(O\Omega)$ coupe la droite (AB) au point H d'affixe h .
0,50	II	2	a	Montrer que $\left(\frac{h-a}{b-a}\right)$ est un réel et que $\left(\frac{h}{b-a}\right)$ est un imaginaire pur.
0,25	II	2	b	En déduire h en fonction de m .

Exercice Numéro 3 : (03,00 points)

				On admet que 2969 (l'année Amazighe actuelle) est un nombre premier. Soient m et n deux entiers naturels vérifiant : $n^8+m^8\equiv 0\,[2969]$.
		1		On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n.
0,50		1	a	En utilisant le théo de Bezout, montrer que : $(\exists u\in\mathbb{Z})$: $u\times n\equiv 1[2969]$
0,50		1	b	En déduire que : $(u\times m)^8\equiv -1\,[2969]$ et que $(u\times m)^{2968}\equiv -1\,[2969]$ On pourra remarquer que $2969=8\times 371$.
0,50		1	c	Montrer que 2969 ne divise pas $(u\times m)$.
0,50		1	d	En déduire qu'on a aussi $(u\times m)^{2968}\equiv 1[2969]$.
0,50		2	a	En utilisant les résultats précédents, montrer que 2969 divise n.
0,50		2	b	Montrer que : $(n^8+m^8)\equiv 0\,[2969] \Leftrightarrow \left\vert \begin{array}{l} Et\quad n\equiv 0[2969] \\ Et\quad m\equiv 0[2969] \end{array}\right.$.

Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

	I			On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=4x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)$ On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$
0,50	I	1		Calculer les limites : $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} f(x)$
0,50	I	2	a	Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$. Et que $(\forall x\in\mathbb{R})$: $f'(x)=4(e^{-x}-1)(1-x)$.
0,75	I	2	b	Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$, puis donner son tableau de variations.

0,50	I	2	c	Montrer qu'il existe un unique réel α dans l'intervalle $\left]\frac{3}{2};2\right[$ tel que $f(\alpha)=0$ (On prendrea $e^{3/2}=4{,}5$)
0,25	I	2	d	Vérifier que : $e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}$.
0,50	I	3	a	En appliquant le théorème de Rolle à la fonction f', Montrer qu'il existe un réel x_0 de l'intervalle $]0{,}1[$ tel que $f''(x_0)=0$
0,50	I	3	b	En appliquant le théorème de TAF à la fonction f'', Montrer que, pour tout réel x différent de x_0 de l'intervalle $[0{,}1]$, On a : $\dfrac{f''(x)}{x-x_0}>0$
0,25	I	3	c	En déduire que $I\big(x_0,f(x_0)\big)$ est un point d'inflexion de la courbe (C)
0,50	I	4	a	Étudier les branches infinies de la courbe (C) .
0,50	I	4	b	Représenter graphiquement la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ (On prendra $\|\vec{\imath}\|=\|\vec{\jmath}\|=1\,cm$ et $f(1)=-0{,}5$)
0,25	I	5	a	Vérifier que : ($\forall\, x \in\,]-\infty,\alpha]$) ; $f(x)\leq 0$)
0,75	I	5	b	Montrer que : $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\frac{2\alpha(\alpha^2-3)}{3}$, En déduire que : $\frac{3}{2}<\alpha<\sqrt{3}$
0,50	I	5	c	Calculer en fonction de α , en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives : $x=0$; $y=0$; $x=\alpha$.
	II			On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $\begin{cases} u_{n+1}=f(u_n)+u_n \; ; \; (\forall\, n \in \mathbb{N}) \\ u_n<\alpha \end{cases}$
0,50	II	1	a	Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n<\alpha$ $\left(utiliser\ \boxed{I}\,\boxed{5}\,\boxed{a}\right)$
0,25	II	1	b	En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
	II	2		On suppose que $u_n\geq 0$ et On pose : $(\forall x\in\mathbb{R})$; $g(x)=e^{-x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$
0,50	II	2	a	Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R})$: $g(x)>0$ (On prendra $\ln 2=0{,}69$)
0,50	II	2	b	En utilisant le résultat de la question précédente, Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n\geq 0$. (On pourrait user $f(x)+x=4x\cdot g(x)$)
0,25	II	2	c	Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
0,50	II	2	d	Calculer la limite $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$
	II	3		On suppose maintenant que $u_0<0$.
0,50	II	3	a	Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_{n+1}-u_n\leq f(u_0)$
0,50	II	3	b	Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$: $u_n\leq u_0+n\,f(u_0)$.
0,25	II	3	c	En déduire la valeur de la limite suivante : $\lim\limits_{n\infty}(u_n)$

★★★

Épreuve de Maths
Filières : SMA - SMB
Coefficient : 9
Durée : 4 heures

Royaume du Maroc
Ministère de l'Education Nationale
De la Formation professionnelle
de l'Eseignement supérieur
& de la Recherche scientifique

Examen National du
BACCALAURÉAT
Session de Rattrapage
Juillet 2019

■ Exercice Numéro 1 : (03,50 points)

I — Soit α un nombre complexe non nul, On considère dans $\mathbb{C}$ l'ensemble des nombres complexes, l'équation d'inconnue z définie ainsi : $(E_\alpha): \; z^2 - i\alpha\sqrt{3}\,z - \alpha^2 = 0$

0,25 | I 1 a | Vérifier que le discriminant de l'équation (E_α) est $\Delta = \alpha^2$.

0,50 | I 1 b | Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E_α) .

0,50 | I 2 | Sachant que $\alpha = |\alpha|\, e^{i\lambda}$; $\lambda \epsilon \mathbb{R}$, mettre les deux racines de l'équation (E_α) sous la forme exponontielle.

II — On suppose que le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points $\Omega\,, M_1 \;et\; M_2$ d'affixes respectivement $\alpha\,,\; z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} \;\; et \;\; z_2 = \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et soit $\mathcal{R}$ La rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

0,50 | II 1 a | Montrer que $\mathcal{R}(\Omega) = M_1$ et que $\mathcal{R}(M_1) = M_2$.

0,25 | II 1 b | En déduire que les deux triangles $O\Omega M_1 \;et\; OM_1M_2$ sont équilatéraux.

0,25 | II 2 a | Vérifier que : $z_1 - z_2 = \alpha$.

0,50 | II 2 b | Montrer que les deux droites $(\Omega M_2) \;et\; (OM_1)$ sont orthogonales

0,25 | II 2 c | En déduire que $O\Omega M_1M_2$ est un losange.

0,50 | II 3 | Montrer que pour tout réel θ , le nombre $z = \left(\frac{z_2-\alpha}{z_1-\alpha}\right) \div \left(\frac{z_2-|\alpha|e^{i\theta}}{z_1-|\alpha|e^{i\theta}}\right) \epsilon\, \mathbb{R}$

■ Exercice Numéro 2 : (03,00 points)

Une urne contient n boules numérotées de 1 à n $(n\epsilon\mathbb{N}^*\backslash\{1;2\})$. On retire, sans remise, l'une après l'autre toutes les boules de cette urne. Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1,00 | 1 | Quelle est la probabilité pour que les boules 1, 2, 3 sortent consécutivement et dans cet ordre ?

1,00 | 2 | Calculer la probabilité que les boules 1, 2, 3, sortent dans cet ordre (consécutivement ou pas) ?

1,00 | 3 | On considère la variable aléatoire égale au nombre de tirage nécessaire pour obtenir les boules 1, 2, 3.
Déterminer la loi de probabilité de X_n .

Exercice Numéro 3 : (03,50 points)

On considère l'espace vectoriel de dimension = 2 , noté $(v_2,+,\cdot)$.
Soit $(\vec{\imath},\vec{\jmath})$ une base de v_2 . On pose $\overrightarrow{e_1}=\frac{1}{2}\vec{\imath}+\frac{1}{2}\vec{\jmath}$ et $\overrightarrow{e_2}=\frac{1}{2}\vec{\imath}-\frac{1}{2}\vec{\jmath}$

Soit $*$ la loi de composition interne définie sur v_2 par :

$$\forall\,(x,y,x',y')\in\mathbb{R}^4\ ;\ (x\vec{\imath}+y\vec{\jmath})*(x'\vec{\imath}+y'\vec{\jmath})=(xx'+yy')\vec{\imath}+(xy'+yx')\vec{\jmath}$$

0,25 **1 a** Montrer que $(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$ est une base de v_2 .

0,25 **1 b** Vérifier que : $\overrightarrow{e_1}*\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{e_1}$ ■ $\overrightarrow{e_2}*\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_2}$ ■ $\overrightarrow{e_1}*\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{e_2}*\overrightarrow{e_1}=\vec{0}$

0,25 **1 c** Montrer que : $\forall(X,X',Y,Y')\in\mathbb{R}^4\ ;\ (X\overrightarrow{e_1}+Y\overrightarrow{e_2})*(X'\overrightarrow{e_1}+Y'\overrightarrow{e_2})=XX'\overrightarrow{e_1}+YY'\overrightarrow{e_2}$

0,25 **2 a** Montrer que la loi $*$ est commutative.

0,25 **2 b** Montrer que la loi $*$ est associative.

0,25 **2 c** Montrer que la loi $*$ admet un élément neutre.

0,25 **2 d** Montrer que $(v_2,+,*)$ est un anneau commutatif unitaire.

3 Soit $\vec{u}\in v_2\backslash\{\vec{0}\}$. On note $E_{\vec{u}}=\{\,\lambda\vec{u}\ /\ \lambda\in\mathbb{R}\,\}$.

0,25 **3 a** Montrer que $(E_{\vec{u}},+)$ est un sous-groupe du groupe $(v_2,+)$.

0,25 **3 b** Montrer que $(E_{\vec{u}},+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(v_2,+,\cdot)$

0,50 **3 c** Montrer que : $\boxed{E_{\vec{u}}\ stable\ pour\ *}\Leftrightarrow\boxed{la\ famille\ (\vec{u}*\vec{u},\ \vec{u})\ est\ liée}$

4 On suppose que $(\exists\,\alpha\in\mathbb{R}^*)\ ;\ \vec{u}*\vec{u}=\alpha\,\vec{u}$.
On considère l'application :
$$\varphi\ :\ \mathbb{R}^*\longmapsto E_{\vec{u}}$$
$$x\longmapsto\frac{x}{\alpha}\vec{u}$$

0,50 **4 a** Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E_{\vec{u}},\ *)$.

0,25 **4 b** En déduire que $(E_{\vec{u}},+,*)$ est un corps commutatif.

Exercice Numéro 4 : (10,00 points)

I On considère la fonction g définie sur $I=]-1,+\infty[$ par :

$$g(x)=1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)$$

0,25 **I 1 a** Montrer que : $\lim\limits_{x\to(-1)^+}g(x)=2$ et que : $\lim\limits_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

0,50 **I 1 b** Montrer que g est dérivable sur I et que :

$$(\forall\,x\in I)\ ;\ g'(x)=-2(1+2x)\ln(1+x)$$

I 2 On donne le tableau de variations de g :

x	-1		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	2	$\searrow$	$\frac{5}{4}-\frac{\ln 2}{2}$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

0,50	I	2	a	Montrer qu'il existe un réel strictement positif α unique tel que $g(\alpha) = 0$.
0,25	I	2	b	Vérifier que $\alpha < 1$ (On prendra $ln2 = 0{,}7$).
0,50	I	2	c	En déduire que : $\begin{cases} \forall\, x \in]-1, \alpha[\ ; \ g(x) > 0 \\ \forall\, x \in]\alpha, +\infty[\ ; \ g(x) < 0 \end{cases}$
	II			On considère la fonction f définie sur $I =]-1, +\infty[$ par : $$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$
	II			Soit (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.
0,50	II	1	a	Calculer $\lim\limits_{x \to (-1)^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
0,50	II	1	b	Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.
0,75	II	2	a	Montrer que f est dérivable sur I et que : $(\forall\, x \in I) \ ; \ f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$
0,50	II	2	b	Donner le sens de variations de f sur I.
0,75	II	2	c	Vérifier que : $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha(\alpha+1)}$ et que : $(\forall\, x \in I) \ ; \ f(x) \leq \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$
0,25	II	3	a	Donner l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse 0.
0,50	II	3	b	Montrer que : $(\forall\, x \geq 0) \ ; \ \ln(1+x) \leq x$
0,25	II	3	c	En déduire que : $(\forall\, x \geq 0) \ ; \ f(x) \leq x$
1,00	II	3	d	Représenter graphiquement (T) et (C). soit : $\alpha = 0{,}8$ et $\Vert\vec{\imath}\Vert = \Vert\vec{\jmath}\Vert = 2cm$
	III			On pose : $J = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$
1,00	III	1	a	En utilisant le changement de variable $t = \frac{1-x}{1+x}$, Montrer que $J = \frac{\pi \ln 2}{8}$.
0,50	III	1	b	Déterminer en cm², l'aire du domaine plan limité par la courbe (C), La tangente (T), la droite d'équation $x = 0$ et la droite d'équation $x = 1$.
0,50	III	2		En utilisant l'intégration par parties, Calculer : $K = \displaystyle\int_0^1 \frac{Arctan(x)}{1+x}\,dx$
0,50	III	3		En utilisant la méthode d'intégration par changement de variable, Calculer l'intégrale L suivante : $L = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,dx$

Mathématiques

Mes Propositions de Correction

2015 normale et de Rattrapage

2016 normale et de Rattrapage

2017 normale et de Rattrapage

2018 normale et de Rattrapage

2019 normale et de Rattrapage

Examens Oujda et Khmiset

2015 N

Le Premier Exercice

La Question : 1) a)

On calcule directement le déterminant de cette équation à l'aide de la formule connue :

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(5+i\sqrt{3}\right)^2-4\left(4+4i\sqrt{3}\right)\\ &= 25+10i\sqrt{3}+\left(i\sqrt{3}\right)^2-16-16i\sqrt{3}\\ &= 25+10i\sqrt{3}-3-16-16i\sqrt{3}\\ &= 6-6i\sqrt{3}\end{aligned}$$

D'où le résultat suivant : $\Delta = 6-6i\sqrt{3} \rightsquigarrow (1)$

De l'autre côté, On développe $\left(3-i\sqrt{3}\right)^2$ on trouve :

$$\left(3-i\sqrt{3}\right)^2 = 9-6i\sqrt{3}-3 = 6-6i\sqrt{3}$$

D'où le résultat suivant :

$$\left(3-i\sqrt{3}\right)^2 = 6-6i\sqrt{3} \rightsquigarrow (2)$$

D'après (1) et (2) on déduit que $\Delta = \left(3-i\sqrt{3}\right)^2$

Remarque : la question posée est une question de vérification. C-à-d que le résultat est connu a priori. Et on vous demande de le redémontrer et de le redécouvrir. Mais si on reformule la question ainsi : écrire sous forme d'un carré, alors là je vous propose le procédé suivant :

Premièrement : On doit écrire $\left(6-6i\sqrt{3}\right)$ sous sa forme exponentielle $re^{i\theta}$

$$r = \sqrt{6^2+\left(6\sqrt{3}\right)^2} = 12$$

$$\begin{aligned}\Longrightarrow\quad 6-6i\sqrt{3} &= 12\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\\ &= 12\left(\cos\left(\frac{-\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{3}\right)\right)\\ &= 12e^{\frac{-i\pi}{3}}\end{aligned}$$

Il est facile maintenant de trouver les racines carrées de $12e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

Rappel : les racines $n^{\text{ème}}$ du nombre complexe $re^{i\theta}$ sont les nombres complexes $z_k = \sqrt[n]{r}\,e^{i\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)}$.
k et n sont deux entiers naturels qui vérifient $n \geq 2$ et $0 \leq k \leq n-1$.

D'après ce petit rappel, on déduit que les racines carrées de $12e^{\frac{-i\pi}{3}}$ sont :

$$\begin{aligned}z_0 &= \sqrt[2]{12}\,e^{i\left(\frac{\frac{-\pi}{3}+2\times0\times\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{3}\,e^{\frac{-i\pi}{6}}\\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{1}{2}\right)\\ &= 3-i\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_1 &= \sqrt[2]{12}\,e^{i\left(\frac{\frac{-\pi}{3}+2\times1\times\pi}{2}\right)} = 2\sqrt{3}\,e^{\frac{5i\pi}{6}}\\ &= 2\sqrt{3}\left(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)\right)\\ &= 2\sqrt{3}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)\\ &= -3+i\sqrt{3}\end{aligned}$$

Finalement on écrit : $\Delta = \left(3-i\sqrt{3}\right)^2 = \left(-3+i\sqrt{3}\right)^2$

La Question : 1) b)

$$a = \frac{\left(5+i\sqrt{3}\right)-\left(3-i\sqrt{3}\right)}{2} = 1+i\sqrt{3}$$

$$b = \frac{\left(5+i\sqrt{3}\right)+\left(3-i\sqrt{3}\right)}{2} = 4 \in \mathbb{R}$$

La Question : 1) c)

$$\begin{aligned}\left(1-i\sqrt{3}\right)a &= \left(1-i\sqrt{3}\right)\left(1+i\sqrt{3}\right)\\ &= 1^2-\left(i\sqrt{3}\right)^2\\ &= 1-(-3) = 4 = b\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

Soit R la rotation mentionnée dans cette question

$$\begin{aligned}R(O) = B_1 \quad&\Leftrightarrow\quad \left(z_{B_1}-z_A\right) = e^{\frac{i\pi}{2}}\left(z_O-z_A\right)\\ &\Leftrightarrow\quad (b_1-a) = i(0-a)\\ &\Leftrightarrow\quad b_1 = a(1-i)\\ &\Leftrightarrow\quad b_1 = \left(1+\sqrt{3}\right)(1-i)\\ &\Leftrightarrow\quad b_1 = \left(1+\sqrt{3}\right)+i\left(\sqrt{3}-1\right)\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Notons par H la transformation du plan (P) qui associe B à B_1

$$\begin{aligned}\left(\frac{z_B-z_A}{z_{B_1}-z_A}\right) &= \frac{4-1-i\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}+i\sqrt{3}-i-1-i\sqrt{3}}\\ &= \frac{3-i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i} = \frac{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}-i\right)}{\left(\sqrt{3}-i\right)} = \sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\left(\frac{z_B - z_A}{z_{B_1} - z_A}\right) = \sqrt{3} \implies (z_B - z_A) = \sqrt{3}(z_{B_1} - z_A)$$
$$\implies \overrightarrow{AB} = \sqrt{3}\,\overrightarrow{AB_1}$$

Donc B est l'image de B_1 par l'homothétie H de centre A et de rapport $\sqrt{3}$.

La Question : 2) c)

$$\frac{b}{b-a} = \frac{(1-i\sqrt{3})a}{(1-i\sqrt{3})a - a} = \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}-1}$$
$$= \frac{1-i\sqrt{3}}{-i\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i$$

$$\left|1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i\right| = \sqrt{1^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{b}{b-a} = 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}i = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{2}{\sqrt{3}}e^{\frac{i\pi}{6}}$$
$$\implies \arg\left(\frac{b}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

La Question : 2) d)

Soit $(\mathcal{C})$ le cercle circonscrit au triangle OAB et soit C un point du cercle $(\mathcal{C})$ différent de O et de B .

$$C \in (\mathcal{C}) \implies O, A, B \text{ et } C \text{ sont circulaires}$$
$$\implies \arg\left(\frac{z_O - z_c}{z_A - z_c}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_O - z_B}{z_A - z_B}\right)[\pi]$$
$$\implies \arg\left(\frac{0-c}{a-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{0-b}{a-b}\right)[\pi]$$
$$\implies \arg\left(\frac{-c}{a-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{-b}{a-b}\right)[\pi]$$
$$\implies \arg\left(\frac{c}{a-c}\right) + \pi \equiv \arg\left(\frac{b}{a-b}\right) + \pi[\pi]$$
$$\implies \arg\left(\frac{c}{a-c}\right) \equiv \arg\left(\frac{b}{a-b}\right)[\pi]$$
$$\implies \arg\left(\frac{c}{a-c}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[\pi]$$

Le Deuxième Exercice

La Question : 1)

Rappel : (Théorème de Bezout)

$$a \wedge b = 1 \iff \exists\, u, v \in \mathbb{Z}\ ;\ au + bv = 1$$

On a : $1436(1051) + 2015(-749) = 1$

Alors : $2015 \wedge 1436 = 1$

La Question : 2) a)

Soit x un entier relatif vérifiant $x^{1439} \equiv 1436[2015]$

$$\implies (\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ x^{1439} - 1436 = 2015k$$
$$\implies (\exists k \epsilon \mathbb{Z})\ ;\ x^{1439} - 2015k = 1436$$

Soit d un diviseur commun des nombres x et 2015

$$\implies d/x \quad et \quad d/2015$$
$$\implies d/x^{1439} \quad et \quad d/2015k$$
$$\implies d/(x^{1439} - 2015k)$$
$$\implies d/1436$$

La Question : 2) b)

Soit $\delta = 2015 \wedge x$

$$\implies \delta/2015 \quad et \quad \delta/x$$
$$\implies \delta/2015 \quad et \quad \delta/1436\ ;\ selon 2) a)$$
$$\implies \begin{cases} \delta/(2015 \times 749) \\ \delta/(1436 \times 1051) \end{cases}$$
$$\implies \delta/(1436 \times 1051 - 2015 \times 749)$$
$$\implies \delta/1$$
$$\implies \begin{cases} oubien \quad \delta = 1 \\ oubien \quad \delta = -1 \end{cases}$$
$$\implies \delta = 1\ ;\ car\ 1 > -1$$
$$\implies 2015 \wedge x = 1$$

La Question : 3) a)

Rappel : (Théorème de Fermat)

La Forme générale :

$$p \in \mathbb{P} \implies (\forall a \epsilon \mathbb{Z})\ :\ a^p \equiv a[p]$$

La Forme réduite :

$$\left|\begin{array}{l} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{array}\right. \implies a^{p-1} \equiv 1[p]$$

Pour commencer, il est très facile de montrer que 5, 13 et 31 sont tous des nombres premiers. Et cela à l'aide du critère connu par tout le monde (test de primalité). Aussi, une simple calculette nous assure les égalités suivantes :

$$\left|\begin{array}{l} 1440 = 360 \times 4 \\ 1440 = 120 \times 12 \\ 1440 = 30 \times 48 \end{array}\right.$$

Rappel : $x \wedge abc = 1 \iff \left|\begin{array}{l} x \wedge a = 1 \\ x \wedge b = 1 \\ x \wedge c = 1 \end{array}\right.$

$$x \wedge 2015 = 1 \iff x \wedge (5 \times 13 \times 31) = 1$$
$$\iff \left|\begin{array}{l} x \wedge 5 = 1 \\ x \wedge 13 = 1 \\ x \wedge 31 = 1 \end{array}\right.$$

Et voilà ! on dispose maintenant des armes nécessaires pour appliquer le Théorème de Fermat sous sa forme réduite :

$$\begin{cases} 5 \in \mathbb{P} \\ x \wedge 5 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^{5-1} \equiv 1[5] \Rightarrow x^{4} \equiv 1[5] \Rightarrow (x^4)^{360} \equiv 1^{360}[5] \Rightarrow x^{1440} \equiv 1[5]$$

$$\begin{cases} 13 \in \mathbb{P} \\ x \wedge 13 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^{13-1} \equiv 1[13] \Rightarrow x^{12} \equiv 1[13] \Rightarrow (x^{12})^{120} \equiv 1^{120}[13] \Rightarrow x^{1440} \equiv 1[13]$$

$$\begin{cases} 31 \in \mathbb{P} \\ x \wedge 31 = 1 \end{cases} \Rightarrow x^{31-1} \equiv 1[31] \Rightarrow x^{30} \equiv 1[31] \Rightarrow (x^{30})^{48} \equiv 1^{48}[31] \Rightarrow x^{1440} \equiv 1[31]$$

La Question : 3) b)

Rappel : $\begin{cases} a/n \\ b/n \\ a \wedge b = 1 \end{cases} \Rightarrow ab/n$

$$\begin{cases} x^{1440} \equiv 1[5] \\ x^{1440} \equiv 1[13] \\ 5 \wedge 13 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 5/(x^{1440}-1) \\ 13/(x^{1440}-1) \\ 5 \wedge 13 = 1 \end{cases} \Rightarrow (5 \times 13)/(x^{1440}-1) \Rightarrow 65/(x^{1440}-1) \Rightarrow x^{1440} \equiv 1[65]$$

$$\begin{cases} x^{1440} \equiv 1[65] \\ x^{1440} \equiv 1[31] \\ 65 \wedge 31 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 65/(x^{1440}-1) \\ 31/(x^{1440}-1) \\ 65 \wedge 31 = 1 \end{cases} \Rightarrow (65 \times 31)/(x^{1440}-1) \Rightarrow 2015/(x^{1440}-1) \Rightarrow x^{1440} \equiv 1[2015]$$

La Question : 4)

$$\begin{cases} x^{1439} \equiv 1436[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \cdot x^{1439} \equiv 1436x[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^{1440} \equiv 1436x[2015] \\ x^{1440} \equiv 1[2015] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1436x \equiv 1[2015] \quad (1) \\ 1436 \times 1051 \equiv 1[2015] \quad (2) \end{cases}$$

$$(1)-(2) \Rightarrow 1436(x-1051) \equiv 0[2015] \Rightarrow 2015/1436(x-1051) \Rightarrow 2015/(x-1051)\ ;\ Gauss \Rightarrow x \equiv 1051[2015]$$

Remarque : On peut montrer que $2015 \wedge 1436 = 1$ à l'aide du procédé de la décomposition en produit de facteurs premiers de 2015 et de1436

On a : $\begin{cases} 2015 = 5 \times 13 \times 31 \\ 1436 = 2^2 \times 359 \end{cases}$

D'où : $(5 \times 13 \times 31) \wedge (2^2 \times 359) = 1$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

L'application φ est définie comme suit :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longmapsto & (E,\top) \\ x & \longmapsto & M(x-1) \end{array}$$

Le but de cette question est de montrer la chose suivante : $\varphi(x+y) = \varphi(x) \top \varphi(y)$

Pour commencer, soient x et y deux nombres réels .

$$\begin{aligned} \varphi(x) \top \varphi(y) &= M(x-1) \top M(y-1) \\ &= M(x-1+y-1+1) \\ &= M(x+y-1) \\ &= \varphi(x+y) \end{aligned}$$

D'où φ est un homomorphisme de groupes.

La Question : 1) b)

Premièrement, On veut-bien montrer que φ est une bijection. Il suffit de résoudre l'équation $\varphi(x) = M(x-1)$ dans $\mathbb{R}$ et montrer qu'elle admet une seule solution réelle .

Etant donnée M une matrice de E, alors par définition de l'ensemble E on peut écrire M sous la forme $M = M(x) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix}$ avec x est un nombre réel. Donc $\varphi(x+1) = M(x)$

c-à-d : $(\forall M \in E)(\exists! x \in \mathbb{R}) : \varphi(x+1) = M(x)$

Et d'après la définition d'une application bijective on conclut que φ est bien une bijection

Ainsi, l'image du groupe $(\mathbb{R},+)$ par φ est le groupe $(E,\top)$ (car $\varphi(\mathbb{R}) = E$)

Rappel : Si f est un homomorphisme d'un groupe $(G,*)$ vers un ensemble $(F,\top)$. alors l'image du groupe $(G,*)$ par f est le groupe $(f(G),\top)$.

Les propriétés caractéristiques du groupe $(E,\top)$ seront déduites à partir de celles du groupe $(\mathbb{R},+)$ par le biais de l'application φ . Autrement-dit, il suffit d'exploiter l'égalité $\varphi(\mathbb{R},+) = (E,\top)$.

Comme $(\mathbb{R},+)$ est commutatif alors $(E,\top)$ l'est aussi.

Comme 0 est l'élément neutre de $(\mathbb{R},+)$ alors $\varphi(0)$ sera l'élément neutre pour $(E,\top)$ avec $\varphi(0) = M(0-1) = M(-1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ Donc la matrice $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ sera l'élément neutre pour $(E,\top)$.

Le symétrique d'un élément $\varphi(x)$ dans $(E,\top)$ est l'élément $\varphi(-x)$ dans $(E,\top)$ (car $-x$ est le symétrique de x dans $\mathbb{R}$ et on a : $\varphi(-x) = M(-x-1)$

La Question : 2) a)

$$M(x)\times M(y) = \begin{pmatrix} 1-x & x \\ -2x & 1+2x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1-y & y \\ -2y & 1+2y \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (1-x)(1-y)-2xy & y(1-x)+x(1+2y) \\ -2x(1-y)-2y(1+2x) & -2xy+(1+2x)(1+2y) \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-x-y-xy & x+y+xy \\ -2x-2y-2xy & 1+2x+2y+2xy \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1-(x+y+xy) & (x+y+xy) \\ -2(x+y+xy) & 1+2(x+y)+xy \end{pmatrix}$$
$$= M(x+y+xy)$$

La Question : 2) b)

E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisque c'est l'ensemble des matrices carrées, d'ordre 2 à coefficients réels, qui s'écrivent sous la forme $M(x)$ définie dans l'énoncé. Soient $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de E, Alors On a d'après la question précédente : $M(x)\times M(y) = M(x+y+xy)$
comme x et y sont deux nombres réels
alors $(x+y+xy)$ est aussi un nombre réel
d'où : $\forall\, M(x), M(y) \in E \;:\; M(x)\times M(y) \in E$
Donc E est un sous-ensemble de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ stable par la multiplication matricielle $\times$ dans E.
$\times$ est commutative dans E car :

$$\begin{aligned} M(x)\times M(y) &= M(x+y+xy) \\ &= M(y+x+yx) \\ &= M(y)\times M(x) \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

Soients $M(x)$, $M(y)$ et $M(z)$ trois éléments de E.

$$\begin{aligned} M(x)\times\big(M(y)\times M(z)\big) &= M(x)\times M(y+z+1) \\ &= M(2x+y+z+1+xy+xz) \quad (*) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \big(M(x)\times M(y)\big) \top \big(M(x)\times M(z)\big) & \\ &= M(x+y+xy) \top M(x+z+xz) \\ &= M(x+y+xy+x+z+xz+1) \\ &= M(2x+y+z+1+xy+xz) \quad (**) \end{aligned}$$

D'après les résultats $(*)$ et $(**)$ on tire :

$$\begin{aligned} M(x)\times\big(M(y)\times M(z)\big) & \\ &= \big(M(x)\times M(y)\big) \top \big(M(x)\times M(z)\big) \end{aligned}$$

Donc $\times$ est distributive à gauche par rapport à $\top$.
on vérifie aisément la distributivité à droite de $\times$ par rapport à $\top$ pour conclure finalement que $\times$ est distributive par rapport à $\top$.

Soit $M(x)$ un élément de .

$$M(x) \top M(-1) = M(x-1+1) = M(x)$$
$$M(-1) \top M(x) = M(-1+x+1) = M(x)$$

Donc $M(-1)$ est l'élément neutre du groupe $(E,\top)$ pour la matrice unité I.
on a tout d'abord $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 & 0 \\ -2\times 0 & 1+2\times 0 \end{pmatrix}$
soit $M(x)$ un élément de E on a :
$$\left| \begin{array}{l} M(x)\times M(0) = M(x+0+x0) = M(x) \\ M(0)\times M(x) = M(0+x+0x) = M(x) \end{array} \right.$$
Donc $M(0) = I$ est l'élément neutre de la multiplication matricielle $\times$ dans E .

La Question : 3) a)

Soit x un nombre réel différent de -1,

$$\begin{aligned} M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) &= M\left(x+\frac{-x}{1+x}-\frac{x^2}{1+x}\right) \\ &= M\left(\frac{x^2+x-x-x^2}{1+x}\right) \\ &= M(0) = I \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Rappel : soit E un ensemble muni de deux lois de compositions internes $*$ et $\top$.

$(E,*,\top)$ est un corps Si et seulement si :
- $(E,*)$ est un groupe abélien (commutatif)
- $(E\backslash\{e\},\top)$ est un groupe
- $\top$ est distributive par rapport à $*$

Avec e est l'élément neutre du groupe $(E,*)$.

Soient $M(x)$ et $M(y)$ deux éléments de $E\backslash\{M(-1)\}$
On a : $M(x)\times M(y) = M(x+y+xy)$
Comme $\begin{cases} x \neq -1 \\ y \neq -1 \end{cases}$ alors $\begin{cases} y(x+1) \neq 0 \\ x \neq -1 \end{cases}$
Donc $x + y(x+1) \neq -1$
c-à-d : $(x+y+xy) \neq -1$
D'où : $M(x+y+xy) \in E\backslash\{M(-1)\}$

Donc $\times$ est une loi de composition interne dans l'ensemble $E\backslash\{M(-1)\}$.

Comme $\times$ est associative dans E alors elle l'est aussi dans $E\backslash\{M(-1)\}$. comme $I = M(0)$ est l'élément neutre pour $(E,\times)$ et $M(0) \in E\backslash\{M(-1)\}$ alors I est aussi l'élément neutre pour $\times$ dans $E\backslash\{M(-1)\}$

Comme $\forall\, x \in \mathbb{R}\backslash\{-1\}$; $M(x)\times M\left(\frac{-x}{1+x}\right) = I$
alors tout élément $M(x)$ de $E\backslash\{M(-1)\}$ admet un symétrique $M\left(\frac{-x}{1+x}\right)$ dans $E\backslash\{M(-1)\}$

Finalement : On a trouvé que × est une loi de composition interne dans $E\backslash\{M(-1)\}$, associative, admet un élément neutre et qui vérifie la symétrie des éléments de $E\backslash\{M(-1)\}$
alors $(E\backslash\{M(-1)\}\,;\times)$ est un groupe (1) .

Mais d'après les questions précédentes on a vu que $(E,\top)$ est un groupe (2) . et aussi que × est distributive par rapport à ⊤ (3). Donc on tire des résultats (1) , (2) et (3) , à l'aide du rappel que $(E,\top,\times)$ est bien un corps qui est commutatif car la loi × est commutative dans E.

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \underbrace{x}_{+\infty}\Big(1+\underbrace{(\ln x)^2}_{+\infty}\Big) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1+(\ln x)^2 = +\infty$$

Donc la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique suivant l'axe (OY)

La Question : I) 2) a)

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} f(x) &= \lim_{x\to0^+} x(1+(\ln x)^2) \\
&= \lim_{x\to0^+} x + x(\ln x)^2 \\
&= 0 + \lim_{x\to0^+} x(\ln x)^2 \\
&= \lim_{x\to0^+} \left(\sqrt{x}\right)^2\left(2\ln\sqrt{x}\right)^2 \\
&= \lim_{\substack{t\to0^+\\ t=\sqrt{x}}} 4t^2\ln t \\
&= \lim_{t\to0^+} \Big(\underbrace{4t}_{0}\Big)\Big(\underbrace{t\ln t}_{0}\Big) = 0 = f(0)
\end{aligned}$$

Alors la fonction f est bien continue à droite en 0 .

La Question : I) 2) b)

$$\lim_{x\to0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} 1+\Big(\underbrace{\ln x}_{-\infty}\Big)^2 = +\infty$$

l'axe (OY) est tangente à $(\mathcal{C})$ au voisinage de 0 .

La Question : I) 2) c)

$$\begin{aligned}
f'(x) &= (\ln x)^2 + 2(\ln x) + 1 \\
&= (\ln x + 1)^2 > 0 \;;\; \forall x > 0
\end{aligned}$$

Alors la fonction f est purement croissante.

La Question : I) 3) a)

$$f'(x) = (\ln x + 1)^2$$

f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant un carré d'une autre fonction aussi dérivable. La dérivée seconde f'' est définie par :

$$f''(x) = 2(\ln x + 1)\cdot\frac{1}{x} = \frac{2(\ln x+1)}{x}$$

Si $x = \frac{1}{e}$ Alors $f''(x) = 0$

Si $x > \frac{1}{e}$ Alors $f''(x) > 0$

Si $x < \frac{1}{e}$ Alors $f''(x) < 0$

Alors $\left(\frac{1}{e}, f\left(\frac{1}{e}\right)\right)$ est un point d'inflexion à $(\mathcal{C})$.

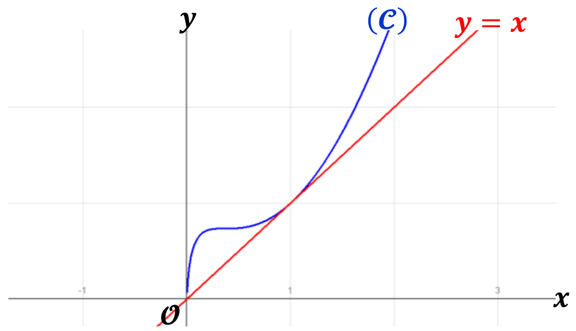
La Question : I) 3) b)

$$f(x) - x = x(1+(\ln x)^2) - x = x(\ln x)^2$$

$$\begin{aligned}
Alors\ :\ signe(f(x)-x) &\equiv signe(x(\ln x)^2) \\
&\equiv signe(x)\ ;\ car\ \ (\ln x)^2 > 0 \\
&\equiv (+)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow\ \forall x \geq 0\ ;\ f(x) - x \geq 0 \\
&\Longrightarrow\ \forall x \epsilon [0,+\infty[\ ;\ f(x) \geq x
\end{aligned}$$

La Question : I) 3) c)



La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Soit (P_n) la proposition définie comme suit :
$(P_n)\ :\ \frac{1}{e} \leq u_n < 1$. Examinons la véracité de (P_n) pour chaque n de $\mathbb{N}$ à l'aide du procédé de récurrence. L'instance (P_0) est validée car tout simplement $\frac{1}{e} \leq \frac{1}{e} < 1$.
Soit n dans $\mathbb{N}$ et on suppose que (P_n) soit vraie.

$$
\begin{aligned}
(P_n)\ est\ vraie\ &\Rightarrow e^{-1} \leq u_n < 1\\
&\Rightarrow f(e^{-1}) \leq f(u_n) < f(1)\\
&\Rightarrow \frac{2}{e} \leq f(u_n) < 1\ ;\ car\ f\ est\ \nearrow\\
&\Rightarrow \frac{1}{e} < \frac{2}{e} \leq f(u_n) < 1\\
&\Rightarrow \frac{1}{e} < f(u_n) < 1\\
&\Rightarrow \frac{1}{e} \leq f(u_n) < 1\\
&\Rightarrow (P_{n+1})\ \ est\ vraie
\end{aligned}
$$

Ainsi : $\begin{cases} l'instance(P_0)\ est\ vraie \\ l'instance(P_n)\ implique\ (P_{n+1})\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$

Donc (P_n) est toujours vraie
C-à-d : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ \frac{1}{e} \leq u_n < 1$

La Question : II) 2)

$$
\begin{aligned}
&(\forall x > 0)\ :\ f(x) \geq x\\
&(pour\ x = u_n)\ :\ f(u_n) \geq u_n\\
&car\ \ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_n \geq \frac{1}{e} > 0\\
&Donc\ \ (\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ u_{n+1} \geq u_n
\end{aligned}
$$

Et par définition de la croissance des suites on conclut que $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est une suite croissante.
Or, $\forall n\epsilon\mathbb{N}\ ;\ u_n < 1$ (majorée par 1)
Donc $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ converge vers une limite réelle l .

La Question : II) 3) a)

$$
\begin{aligned}
(\forall n\epsilon\mathbb{N})\ ;\ &\frac{1}{e} \leq u_n < 1\\
\Rightarrow\ &\frac{1}{e} \leq l \leq 1\quad ;\ \ passage\ aux\ limites
\end{aligned}
$$

La Question : II) 3) b)

$$
(u_n) : \begin{cases} u_{n+1} = f(u_n)\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N} \\ u_0 = \dfrac{1}{e} \end{cases}
$$

f est une fonction continue et croissante, soit $l = \lim_{n\infty}(u_n)$; Donc l vérifie : $l = f(l)$.

$$
\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\ \ l(1 + (\ln l)^2) = l\\
&\Leftrightarrow\ \ 1 + (\ln l)^2 = 1\ ;\ l \neq 0\\
&\Leftrightarrow\ \ (\ln l)^2 = 0\\
&\Leftrightarrow\ \ \ln l = 0\\
&\Leftrightarrow\ \ l = 1
\end{aligned}
$$

La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

Une condition suffisante pour qu'une fonction f admette des primitives sur un intervalle est qu'elle y soit continue. Il est évident que la fonction h est bien continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ comme étant somme de deux fonctions trivialement continues sur $]0,+\infty[$. il reste à démontrer que :
$\forall\ x\ \epsilon\ ]0,+\infty[\ \ ;\ \ H'(x) = f(x)$

$$
\begin{aligned}
\text{Soit } x > 0\ ;\ H'(x) &= \tfrac{-2}{4}x + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{x^2}{x} + 2x\ln x\right)\\
&= \frac{-x}{2} + \frac{x}{2} + x\ln x\\
&= x\ln x\\
&= h(x)
\end{aligned}
$$

La Question : III) 1) b)

Je propose une démarche à base d'une intégration par parties.
Rappel : l'intégration par parties est la méthode à travers laquelle on transforme l'intégrale d'un produit de fonctions en d'autres intégrales dans le but de simplifier le calcul :

$$
\int_a^b u(x)\cdot v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)\cdot v(x)\,dx
$$

$$
\begin{aligned}
\int_1^x \underbrace{t}_{u'(t)} \cdot \underbrace{(\ln t)^2}_{v(t)}\,dt &= [u(t)v(t)]_1^x - \int_1^x u(t)v'(t)\,dt\\
&= \left[\frac{t^2}{2}\cdot(\ln t)^2\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t^2}{2}\cdot 2\ln t\cdot\frac{1}{t}\right)dt\\
&= \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int_1^x t\ln t\,dt
\end{aligned}
$$

La Question : III) 1) c)

Evaluons d'abord l'intégrale suivante : $\int_1^x tlnt\,dt$

$$
\begin{aligned}
\int_1^x (t\ln t)dt = \int_1^x H'(t)\,dt\ &= [H(t)]_1^x\\
&= H(x) - H(1)\\
&= \frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_1^x f(t)\,dt \\
&= \int_1^x t(1+(\ln t)^2)\,dt \\
&= \int_1^x t\,dt + \int_1^x \underbrace{t}_{v'(t)} \cdot \underbrace{(\ln t)^2}_{u(t)}\,dt \\
&= \left[\frac{t^2}{2}\right]_1^x + \left[\frac{t^2}{2}(\ln x)^2\right]_1^x - \int_1^x \left(\frac{t^2}{2}\cdot 2\ln t\cdot\frac{1}{t}\right)dt \\
&= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \int_1^x (t\ln t)\,dt \\
&= \left(\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\right) + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \left(\frac{-1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x^2\ln x + \frac{1}{4}\right) \\
&= \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2}
\end{aligned}
$$

La Question : III) 2) a)

$$F(x) = \frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2}$$

F est continue sur $[0,+\infty[$ comme étant somme de quatre fonctions toutes continues sur $[0,+\infty[$.

La Question : III) 2) b)

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} F(x) &= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{3x^2}{4} - \frac{3}{4} + \frac{x^2(\ln x)^2}{2} - \frac{x^2\ln x}{2}\right) \\
&= \left(\frac{-3}{4} + 0 - 0 + 0\right) = \frac{-3}{4}
\end{aligned}
$$

La continuité à droite en 0 nous donne :

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to0^+} F(x) = F(0) \quad &\Longrightarrow \quad \frac{-3}{4} = \int_1^0 f(t)\,dt \\
&\Longrightarrow \quad \frac{3}{4} = \int_0^1 f(t)\,dt
\end{aligned}
$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

Soient $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad x \le t \le 2x \\
&\Longrightarrow \quad -2x \le -t \le -x \\
&\Longrightarrow \quad e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x} \;;\; Exp\ est \nearrow
\end{aligned}
$$

La Question : 1) b)

Soient $x > 0$ et $t \in [x, 2x]$

$$e^{-2x} \le e^{-t} \le e^{-x} \;\Longrightarrow\; \frac{e^{-2x}}{t} \le \frac{e^{-t}}{t} \le \frac{e^{-x}}{t} \;;\; t > 0$$

$$\Longrightarrow \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-2x}}{t}\right)dt \le \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)dt \le \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-x}}{t}\right)dt$$

J'ai le droit d'introduire l'intégrale parce que les trois fonctions sont toutes continues sur $[x, 2x]$ et aussi $x < 2x$ gardera l'ordre inchangeable.

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad e^{-2x}[\ln|t|]_x^{2x} \le g(x) \le e^{-x}[\ln|t|]_x^{2x} \\
&\Longrightarrow \quad e^{-2x}(\ln 2) \le g(x) \le e^{-x}(\ln 2)
\end{aligned}
$$

La Question : 1) c)

$$\underbrace{e^{-2x}(\ln 2)}_{\xrightarrow[\boldsymbol{x\to0^+}]{}\ \ln 2} \le g(x) \le \underbrace{e^{-x}(\ln 2)}_{\xrightarrow[\boldsymbol{x\to0^+}]{}\ \ln 2}$$

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \lim_{x\to0^+} g(x) = \ln 2 = g(0) \\
&\Longrightarrow \quad g\ est\ bien\ conitnue\ à\ droite\ en\ 0
\end{aligned}
$$

La Question : 2)

Soit a un réel strictement positif.

La fonction $\varphi : t \longmapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$ et $a \in\,]0,+\infty[$ Donc $\psi : x \longmapsto \int_a^x \left(\frac{e^{-t}}{t}\right)dt$ est la seule fonction primitive de φ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en a

C-à-d : $\begin{cases} \forall x > 0 \;;\; \psi'(x) = \varphi(x) \\ \psi(a) = 0 \end{cases}$

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \int_x^{2x}\left(\frac{e^{-t}}{t}\right)dt = \int_x^{2x}\varphi(t)\,dt \\
&= \int_x^a \varphi(t)\,dt + \int_a^x \varphi(t)\,dt \\
&= -\int_a^x \varphi(t)\,dt + \int_a^{2x}\varphi(t)\,dt \\
&= -\psi(x) + \psi(2x)
\end{aligned}
$$

g est dérivable car elle s'écrit sous la forme d'une somme de deux compositions continues de fonctions continues.

$$
\begin{aligned}
g'(x) = -\psi'(x) + 2\psi'(2x) &= -\varphi(x) + 2\varphi(2x) \\
&= \frac{-e^{-x}}{x} + \frac{2e^{-2x}}{2x} \\
&= \frac{e^{-2x} - e^{-x}}{x}
\end{aligned}
$$

La Question : 3) a)

Soit $t > 0$. la fonction $h : x \longmapsto e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, l'usage du **TAF** est donc valable sur n'importe quel intervalle dans $\mathbb{R}$.
En particulier sur $[0, t]$

$$\begin{cases} h\ est\ continue\ sur\ [0,t] \\ h\ est\ dérivable\ sur\ ]0,t[\end{cases}$$

$$Donc\ :\ \exists\, c \in]0,t[\ ;\ \frac{h(t)-h(0)}{t-0} = h'(c)$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} 0 < c < t \\ \left(\dfrac{e^{-t}-1}{t}\right) = -e^{-c} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} 0 < c < t \ &\Longrightarrow\ -t < -c < 0 \\ &\Longrightarrow\ e^{-t} < e^{-c} < 1\ ;\ Expo\ est\ \nearrow \\ &\Longrightarrow\ -1 < -e^{-c} < -e^{-t} \\ &\Longrightarrow\ -1 < \frac{e^{-t}-1}{t} < -e^{-t}\ ;\ t > 0 \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Soient x et t deux nmbres réels strictement positifs.

$$-1 < \frac{e^{-t}-1}{t} < -e^{-t}\ ;\ t > 0$$

$$\Longrightarrow \int_x^{2x} (-1)\,dt < \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t}-1}{t}\right) dt < \int_x^{2x} (-e^{-t})\,dt$$

On a introduit l'intégrale sur cet encadrement car la continuité est vérifiée et $x < 2x$

$$\Longrightarrow -[t]_x^{2x} \leq \int_x^{2x} \left(\frac{e^{-t}}{t}\right) dt - \int_x^{2x} \left(\frac{1}{t}\right) dt \leq [e^{-t}]_x^{2x}$$

$$\Longrightarrow -x \leq g(x) - \ln 2 \leq e^{-2x} - e^{-x}$$

$$\Longrightarrow -1 \leq \frac{g(x)-\ln 2}{x} \leq \frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\ ;\ x > 0$$

La Question : 3) c)

Calculons tout d'abord cette gentille limite :

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\right) &= \lim_{x\to 0^+} (e^{-x}) \left(\frac{e^{-x}-e^{0}}{x-0}\right) \\ &= (e^{-0})\left((e^{-x})'_{/x=0}\right) \\ &= (e^{-0})(-e^{-0}) \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$D'où :\ \underbrace{-1}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to -1}} \leq \frac{g(x)-\ln 2}{x} \leq \underbrace{\left(\frac{e^{-2x}-e^{-x}}{x}\right)}_{\substack{x\to 0^+ \\ \to -1}}$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) = -1 \in \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow\ g\ est\ dérivable\ à\ droite\ en\ 0$$

2015 R

Le Premier Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\begin{aligned} \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ;\ x * y &= x + y - e^{xy} + 1 \\ &= y + x - e^{xy} + 1 \\ &= y * x \end{aligned}$$

Donc $*$ est commutative dans $\mathbb{R}$.

La Question : I) 1) b)

Soit a l'élément neutre da la loi $*$ dans $\mathbb{R}$, alors : $a * x = x * a = x$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow\ a + x - e^{ax} + 1 = x\ ;\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow\ e^{ax} = a + 1\ ;\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow\ \ln(e^{ax}) = \ln(a+1)\ ;\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow\ ax = \ln(a+1)\ ;\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow\ ax + 0 = 0x + \ln(a+1)\ ;\ \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow\ \begin{cases} Et\ bien\ \ a = 0 \\ Et\ bien\ \ln(a+1) = 0 \end{cases} \\ &\Longrightarrow\ a = 0 \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Donc l'élément neutre de la loi $*$ est 0

Remarque : j'ai utilisé le fait que deux polynômes $\left(\sum_0^n a_i x^i\right)\ et\ \left(\sum_0^n b_i x^i\right)$ sont égaux si et seulement si $\forall (1 \leq i \leq n)\ ;\ a_i = b_i$

La Question : I) 2)

L'équation $3 + x - e^{2x} = 0$ admet deux solutions réelles différentes $\alpha\ et\ \beta$.

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 3 + \alpha - e^{2\alpha} = 0 \\ 3 + \beta - e^{2\beta} = 0 \end{cases} ;\ \alpha \neq \beta$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2 + \alpha - e^{2\alpha} + 1 = 0 \\ 2 + \beta - e^{2\beta} + 1 = 0 \end{cases} ;\ \alpha \neq \beta$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} 2 * \alpha = \alpha * 2 = 0 \\ 2 * \beta = \beta * 2 = 0 \end{cases} ;\ \alpha \neq \beta$$

Dire que la loi $*$ est associative dans $\mathbb{R}$ revient à démontrer, pour tout triplet $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, la chose suivante : $(x * y) * z = x * (y * z)$ $(\blacksquare)$.
Réfuter l'associativité revient donc à trouver un triplet qui ne vérifie pas l'égalité $(\blacksquare)$ (un contre exemple), il suffit de remarquer que le triplet $(\alpha, 2, \beta)$ accomplira la tache avec rigueur.
d'une part : $\alpha * (2 * \beta) = \alpha * 0 = \alpha$
et d'autre part : $(\alpha * 2) * \beta = 0 * \beta = \beta$
comme $\alpha \neq \beta$ alors $\alpha * (2 * \beta) \neq (\alpha * 2) * \beta$
Donc c'est gagné.

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Rappel : En algèbre linéaire, un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel E est une partie non vide F de E stable par combinaisons linéaires. Cette stabilité s'exprime par : la somme de deux vecteurs de F appartient à F. et le produit d'un vecteur par un scalaire appartient à F aussi.
Premièrement, F est une partie non vide de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est un élément de F. soient $M(x,y)$ et $M'(x',y')$ deux éléments de F et soit α un nombre réel. Pour simplifier, on pose $M(x,y) = M$ et $M'(x',y') = M'$

$$\alpha M + M' = \alpha \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ \frac{y'}{2} & x' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha x + x' & -2\alpha y - 2y' \\ \frac{\alpha y}{2} + \frac{y'}{2} & \alpha x + x' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (\alpha x + x') & -2(\alpha y - y') \\ \frac{\alpha y + y'}{2} & (\alpha x + x') \end{pmatrix}$$
$$= M(\alpha x + x' ; \alpha y + y') \in F$$

$Ainsi \; : \; (\forall\, (M,M') \in F^2), (\forall \alpha \in \mathbb{R}) \; ; \; (\alpha M + M') \in F$

Donc F est stable par les combinaisons linéaires
D'où $(F,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

La Question : II) 2)

D'abord F est une partie non-vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisqu'elle contient des matrices carrées d'ordre 2 dont l'élément $\mathcal{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ fait partie.
Soient $M = M(x,y)$ et $M' = M'(x',y')$ deux éléments de F .

$$M \times M' = \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ \frac{y'}{2} & x' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} xx' - yy' & -2xy' - 2x'y \\ \frac{x'y}{2} + \frac{xy'}{2} & -yy' + xx' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} (xx' - yy') & -2(xy' + x'y) \\ \frac{(x'y + xy')}{2} & (xx' - yy') \end{pmatrix}$$
$$= M(xx' - yy' \; ; \; x'y + xy') \in F$$

Ainsi : $(\forall\, M, M' \in F) \; ; \; M \times M' \in F$. Donc F est stable par la multiplication matricielle $\times$.
C-à-d : F est stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

La Question : II) 3) a)

Etant donnée φ une application définie sur $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans F qui , à tout complexe $(x+iy)$, associe la matrice $M(x,y)$.

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{C}^* &\longmapsto F \\ (x+iy) &\longmapsto M(x,y) \end{aligned}$$

L'application φ est un homomorphisme si et seulement si elle vérifie la chose suivante :
$(\forall z, z' \in \mathbb{C}^*) \; ; \; \varphi(z \times z') = \varphi(z) \times \varphi(z')$
Soient $(x+iy)$ et $(x'+iy')$ deux nombres complexes non-nuls .

$$\varphi\big((x+iy)\times(x'+iy')\big) = \varphi\big((xx' - yy') + i(xy' + x'y)\big)$$
$$= M\big((xx' - yy') ; (xy' + x'y)\big)$$

Or, d'après le résultat de la question 2), On a vu que $M(x,y) \times M'(x',y') = M(xx' - yy' \; ; \; x'y + xy')$

C-à-d $\varphi(x+iy) \times \varphi(x'+iy') = M(x,y) \times M'(x',y')$
$$= M(xx' - yy' \; ; \; x'y + xy')$$
$$= \varphi\big((x+iy)\times(x'+iy')\big)$$

La Question : II) 3) b)

Pour montrer que $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$, il suffit de montrer que l'application $\varphi : \mathbb{C}^* \longmapsto F^*$ est une bijection.
Soit $M(a,b)$ un élément de F^* .
Donc $M(a,b) = \begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix}$; $(a,b) \neq (0,0)$.
L'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une solution et une seule dans $\mathbb{C}^*$ et c'est le nombre complexe $a+ib$ car $\varphi(x+iy) = M(a,b)$.

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -2y \\ \frac{y}{2} & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ \frac{b}{2} & a \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = a \neq 0 \\ y = b \neq 0 \end{cases}$$

Ainsi ,On a montré la chose suivante :
$(\forall M(a,b) \in F)(\exists!\; (x+iy) \in \mathbb{C}^*) \; : \; \varphi(x+iy) = M(a,b)$.
D'où φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ à valeurs dans F^* .
C-à-d : $\varphi(\mathbb{C}^*) = F^*$.

La Question : II) 3) c)

On a vu que l'application $\varphi : (\mathbb{C}^*,\times) \longmapsto (F^*,\times)$ est un isomorphisme, Donc l'image du groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$ est le groupe $(F^*,\times)$.
En d'autres termes : $\varphi(\mathbb{C}^*,\times) = (F^*,\times)$
ou encore $(\varphi(\mathbb{C}^*),\times) = (F^*,\times)$. C-à-d que $(F^*,\times)$ est un groupe qui hérite ses caractéristiques du groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$. Comme $(1+0i)$ est l'élément neutre du groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$ alors $\varphi(1+0i) = M(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I$ est l'élément neutre du groupe $(F^*,\times)$.

Comme le symétrique d'un élément $(x+iy)$ dans $\mathbb{C}^*$ est $\left(\frac{x}{x^2+y^2} - i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right)$ Alors le symétrique de l'élément $M(x,y)$ dans F^* est $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\,;\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)$.

La Question : II) 4)

Pour montrer que $(F,+,\times)$ est un corps commutatif, il suffit de vérifier les assertions suivantes :
1) $(F,+)$ est un groupe abélien d'élmnt neutre $(0,0)$
2) $\left((F\backslash\{M(0,0)\}\,;\times)\right)$ est un groupe.
3) la loi $\times$ est distributive par rapport à la loi + dans F
4) la loi $\times$ est commutative dans F.

$(F,+)$ est un groupe commutatif puisque $(F,+)$ est un sous-groupe du groupe abélien $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.
Remarquer que $F \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $F \neq \emptyset$
et $M(x,y) - M(x',y') = M(x-x'\,;\, y-y') \in F$

$(F\backslash\{M(0,0)\}\,;\times)$ est un groupe abélien puisque c'est $(F^*,\times)$ qu'on a démontré dans 3)c) .

La loi $\times$ est distributive par rapport à la loi + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ Donc c'est la même chose dans F puisque F est une partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La loi $\times$ est commutative dans F comme on l'avait démontré dans 3)c) .

La conclusion : $(F,+,\times)$ est un corps commutatif.

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

Rappel : du petit Théorème de Fermat :
Si p est un nombre premier et si a est un entier non divisible par p, alors $(a^{p-1}-1)$ est un multiple de p.
Autrement-dit, sous les mêmes conditions sur a et p, on écrit : $a^{p-1} \equiv 1[p]$.

$$\begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{cases} \implies a^{p-1} \equiv 1[p]$$

$$\begin{aligned} 13 \in \mathbb{P} &\implies a^{12} \equiv 1[13]\ ;\ d'après\ Fermat \\ &\implies (a^{12})^{168} \equiv 1^{168}[13] \\ &\implies a^{2016} \equiv 1[13] \end{aligned}$$

La Question : I) 2) a)

On pose $x \wedge 13 = \delta$. comme 13 est un nombre premier alors : ou bien $\delta = 1$,ou bien $\delta = 13$. car les diviseurs de 13 sont $\{-13,-1,1,13\}$. pour montrer que $\delta = 1$ il suffit de réfuter le cas $\delta = 13$ .On le suppose vrai, alors $x \wedge 13 = 13$ C-à-d que 13 divise x D'où l'existence d'un certain x dans $\mathbb{Z}$ tel que $x = 13k$

Comme x est solution de l'équation (E) Alors $x^{2015} \equiv 2[13]$. D'où $(13k)^{2015} \equiv 2[13] \rightsquigarrow (1)$.
Or , $13 \equiv 0[13]$. Donc $(13k)^{2015} \equiv 0[13] \rightsquigarrow (2)$.
Par transitivité du signe $(\equiv)$, et en partant de (1) et (2) on conclut que $2 \equiv 0[13]$. C-à-d que 13 divise 2 (contradiction) Donc la proposition $\delta = 13$ qu'on a supposé être vraie, a abouti à une contradiction (13 divise 2) . Ce qui signifie qu'elle est fausse, Alors $\delta \neq 13$. Ainsi $x \wedge 13 = \delta = 1$.
C-à-d que x et 13 sont premiers entre eux .

La Question : I) 2) b)

Soit x une solution de l'équation (E) .
x est solution de $(E) \implies x \wedge 13 = 1\,,\ selon\ I)2)a)$

$$\implies x^{2016} \equiv 1[13]\ (3)\ ;\ d'après\ I)1)$$

$$\begin{aligned} x\ est\ solution\ de\ (E) &\implies x^{2015} \equiv 2[13] \\ &\implies x \cdot x^{2015} \equiv 2x[13] \rightsquigarrow (4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (3)\ et\ (4) &\implies 2x \equiv 1[13] \\ &\implies \begin{cases} 2x \equiv 1[13] \\ 14 \equiv 1[13]\ ;\ solution\ particulière \end{cases} \\ &\implies 2x - 14 \equiv 0[13] \\ &\implies 2(x-7) \equiv 0[13] \\ &\implies (x-7) \equiv 0[13]\ ; d'après\ Gauss \\ &\implies x \equiv 7[13] \end{aligned}$$

La Question : I) 3)

Pour résoudre l'équation (E) dans $\mathbb{Z}$, il suffit de montrer l'équivalence suivante :
x est solution de $(E) \iff x = 7 + 13k\ ; k\in\mathbb{Z}$.
Pour l'implication directe, si x est solution de (E), alors d'après la question 2)b) On a : $x \equiv 7[13]$ d'où $x = 13k + 7\ ;\ k\in\mathbb{Z}$. Pour l'implication inverse, on se sert de la compatibilité de la congruence modulo avec la multiplication :

$$\begin{aligned} x = 7 + 13k &\implies x \equiv 7[13] \\ &\implies x^{2015} \equiv 7^{2015}[13] \\ &\implies x^{2015} \equiv (7^3)^{671} \times 7^2[13] \\ &\implies x^{2015} \equiv (343)^{671} \times 49\,[13] \\ &\implies x^{2015} \equiv 5^{671} \times 10[13]\ car\ \left| \begin{matrix} 343 \equiv 5[13] \\ 49 \equiv 10[13] \end{matrix} \right. \\ &\implies x^{2015} \equiv (5^2)^{335} \times 5^1 \times 10[13] \\ &\implies x^{2015} \equiv 25^{335} \times 50[13] \\ &\implies x^{2015} \equiv (-1)^{335} \times 11[13]\ car\ \left| \begin{matrix} 25 \equiv -1[13] \\ 50 \equiv 11[13] \end{matrix} \right. \\ &\implies x^{2015} \equiv -11[13] \\ &\implies \boxed{x^{2015} \equiv 2[13]}\ car -11 \equiv 2[13] \end{aligned}$$

D'où l'implication suivante :

$$\left| \begin{matrix} x = 7 + 13k \\ k \in \mathbb{Z} \end{matrix} \right. \implies x\ est\ solution\ de\ (E)\ dans\ \mathbb{Z}$$

Finalement : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est donné par $\mathcal{S} = \{\, 7 + 13k\ ;\ k\in\mathbb{Z} \,\}$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

On tire au hasard une boule portante le chiffre n. pour que n soit une solution de l'équation (E), il suffit qu'il s'écrit sous la forme $7+13k$ avec k est un entier relatif et $1 \leq n \leq 50$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad 1 \leq 7+13k \leq 50 \ \ et \ \ k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad -6 \leq 13k \leq 43 \ \ et \ \ k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{-6}{13} \leq k \leq \frac{43}{13} \ \ et \ \ k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \quad 0{,}46 \leq k \leq 3{,}3 \ \ et \ \ k\epsilon\mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \quad k \ \epsilon \ [-0{,}46\,;3{,}3] \cap \mathbb{Z} \\
&\Longrightarrow \quad k \ \epsilon \ \{0\,;1\,;2\,;3\,\} \\
&\Longrightarrow \quad (7+13k) \ \epsilon \ \{7\,;20\,;33\,;46\,\}
\end{aligned}$$

La Question : II) 2)

On considère l'événement A défini comme suit :

$$A = \text{" } tirer\ une\ boule\ numéroté\ 7, 20, 33\ ou\ 46 \text{"}$$

Signalons que l'hypothèse d'équiprobabilité est bien vérifiée puisqu'on a affaire à un tirage au hasard d'une boule parmi cinquante autres toutes identiques. D'où $p(A) = \frac{card\ (A)}{card\ (\Omega)} = \frac{C_4^1}{C_{50}^1} = \frac{4}{50} = \frac{2}{25}$

Rappel : soit A un événement, de probabilité p , dans une expérience aléatoire. Si A est répété indépendamment n fois, alors la probabilité correspondante à la vérification de A exactement k fois est donnée par $p_K = C_n^K \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ fin.
A est un événement de probabilité $\frac{2}{25}$.
Cet événement est répété trois fois.
Ainsi, la probabilité correspondante à l'obtention de A exactement trois fois est donnée par :
$p_3 = C_3^2 \times (p(A))^2 \times (1-p(A))^{3-2} = \frac{276}{15625}$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{aligned}
\Delta &= (1+i)^2 - 4(2+2i) \\
&= 1 + 2i - 1 - 8 - 8i \\
&= 1 - 6i - 9 \\
&= 1^2 - 2(1)(3i) + (3i)^2 \\
&= (1-3i)^2
\end{aligned}$$

La Question : 1) b)

D'après la question 1)a), On remarque que $(1-3i)$ est une racine carrée du déterminant Δ . Ainsi, les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ seront donc $z_1\ et\ z_2$ définies comme suit :

$$\left| \begin{aligned} z_1 &= \frac{(1+i)-(1-3i)}{2} = 2i \\ z_2 &= \frac{(1+i)+(1-3i)}{2} = 1-i \end{aligned} \right.$$

La Question : 1) c)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2i}{1-i} = \frac{2i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = i-1$$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = |i-1| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2} \\
&\Longrightarrow \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\frac{-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \\
&\qquad = \sqrt{2}\left(-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&\qquad = \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)\right) \\
&\qquad = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right) \\
&\qquad = \sqrt{2}e^{\left(\frac{i3\pi}{4}\right)}
\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

$$On\ a :\ aff(A) = z_1 \quad et \quad aff(B) = z_2$$

E est le milieu du segment $[AB]$.

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \quad aff(E) = \frac{aff(A) + aff(B)}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad e = \frac{z_1 + z_2}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad e = \frac{2i + 1 - 1}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad e = \frac{1}{2}i + \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Rappel : Soit $r_{(A,\theta)} : \begin{array}{l} (\mathcal{P}) \ \longmapsto \ (\mathcal{P}) \\ M(z) \longmapsto M'(z') \end{array}$
une rotation dans le plan complexe .

$$r(M) = M' \quad \Leftrightarrow \quad (z' - z_A) = e^{i\theta}(z - z_A)$$

On a : $A(z_1), B(z_2), E\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2}\right)\ et\ C(c)$ et on considère la rotation r dans le plan complexe définie par :

$$r_{\left(A,\frac{-\pi}{2}\right)} : \begin{array}{l} (\mathcal{P}) \ \longmapsto \ (\mathcal{P}) \\ M(z) \ \longmapsto M'(z') \end{array}$$

$$\begin{aligned}
r(E) = c \quad &\Leftrightarrow \quad (z_c - z_1) = e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_E - z_1) \\
&\Leftrightarrow \quad (c - 2i) = -i\left(\frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - 2i\right) \\
&\Leftrightarrow \quad c = 2i + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i - 2 \\
&\Leftrightarrow \quad c = \frac{3i}{2} - \frac{3}{2}
\end{aligned}$$

La Question : 2) c)

$$On\ a\ :\ \left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)$$
$$=\left(\frac{1-i-1-\frac{3}{2}i}{\frac{-5}{2}}\right)\times\left(\frac{\frac{-3}{2}+\frac{3}{2}i-2i}{1-i-2i}\right)$$
$$=\left(\frac{\frac{-5}{2}i}{\frac{-5}{2}}\right)\times\left(\frac{-1}{2}\right)\times\left(\frac{3+i}{1-3i}\right)$$
$$=\left(\frac{-i}{2}\right)\times\left(\frac{3+i}{1-3i}\right)\times\left(\frac{1+3i}{1+3i}\right)$$
$$=\left(\frac{-i}{2}\right)\times\left(\frac{3+9i+i-3}{1-(-9)}\right)$$
$$=\left(\frac{-i}{2}\right)\times\left(\frac{10i}{10}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$

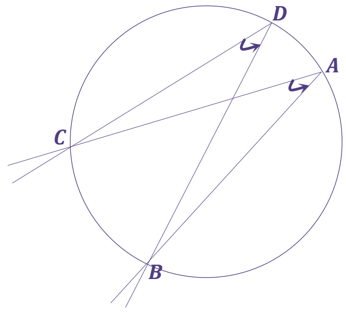
Rappel : soient $A(z_A)\,,B(z_B)\,,C(z_C)\ et\ D(z_D)$ quatre points dans le plan complexe.
Si la quantité $\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\times\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)$ est un nombre réel $\left(\arg\left(\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\times\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)\right)\equiv 0[\pi]\right)$, Alors, ou bien les 4 points sont colinéaires, Ou bien ils sont cocycliques .
Fin du rappel.

$$On\ a\ :\ \left(\frac{z_2-d}{c-d}\right)\times\left(\frac{c-z_1}{z_2-z_1}\right)=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow\ \arg\left(\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)\times\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\right)\equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow\ \arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)+\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv 0\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow\ \arg\left(\frac{z_B-z_D}{z_C-z_D}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\ [\pi]$$
$$\Leftrightarrow\ \left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\ [\pi]$$

Si A, B et D sont colinéaires, alors $\overrightarrow{AB}\ et\ \overrightarrow{AC}$ le sont.
Donc $(\exists k\in\mathbb{R})$; $\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AC}$.
C-à-d : $(z_b-z_A)=k(z_c-z_A)$.
C-à-d : $\left(\frac{z_B-z_A}{z_C-z_A}\right)\in\mathbb{R}\ \rightsquigarrow\ (*)$

$$Or\ ,\ \frac{z_B-z_A}{z_c-z_A}=\left(\frac{1-i-2i}{\frac{-3}{2}+\frac{3i}{2}-2i}\right)=\left(\frac{1-3i}{\frac{-3}{2}-\frac{i}{2}}\right)$$
$$=-2\left(\frac{1-3i}{3+i}\right)\times\left(\frac{3-i}{3-i}\right)$$
$$=-2\left(\frac{3-i-9i-3}{9+1}\right)$$
$$=\frac{-1}{5}(-10i)=2i\in i\mathbb{R}$$

Ce qui est en contradiction avec $(*)$.
D'où A , B et C ne sont pas colinéaires .
de même pour A, B et D. Ainsi, comme ces 4 points ne sont pas colinéaires, alors ils sont cocycliques.



$$\left(\overrightarrow{DC},\overrightarrow{DB}\right)\equiv\left(\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}\right)\ [\pi]$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1) a)

$$\lim_{x\to+\infty}f_n(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$$
$$=\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(+\infty)}}=\frac{1}{1+e^{-\infty}}=\frac{1}{1+0}=1$$

$$\lim_{x\to-\infty}f_n(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}\right)$$
$$=\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(-\infty)}}=\frac{1}{1+e^{+\infty}}=\frac{1}{1+\infty}=0$$

La Question : 1) b)

On a $\frac{-3}{2}(x-n)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier, car c'est une fonction affine. Donc $e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$ est aussi dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier car c'est une composition de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et $e^{\mathbb{R}}\subseteq\mathbb{R}$. d'où $1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
Ainsi $\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant l'inverse d'une fonction dérivable qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ (toujours positive) . Soit $x\in\mathbb{R}$:

$$f_n'(x)=\frac{-\left(e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)'}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}=\frac{-\left(\frac{-3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$
$$=\frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

La Question : 1) c)

$$On\ a\ :\ (\forall x\epsilon\mathbb{R})\ ;\ f_n'(x) = \left(\frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}\right)$$

$f_n'(x)$ est une quantité positive sur $\mathbb{R}$ comme étant une quotient de deux quantités strictement positives. Ainsi : $(\forall x\epsilon\mathbb{R})(\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ f_n'(x) > 0$
D'où f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

La Question : 2) a)

Rappel : Soit D_f le domaine de définition d'une fonction réelle f et soit $A(\alpha,\beta)$ un point dans le plan réel . On dit que $(\mathcal{C}_f)$ est symétrique par rapport à A si les deux assertions suivantes sont vérifiées :

$$\left|\begin{array}{l}(\forall\, x\,\epsilon\, D_f)\ ;\ (\alpha+x)\,\epsilon\, D_f\ \ et\ \ (\alpha-x)\,\epsilon\, D_f\\ (\forall\, x\,\epsilon\, D_f)\ ;\ f(\alpha-x)=f(\alpha+x)\end{array}\right.$$

Fin du rappel.

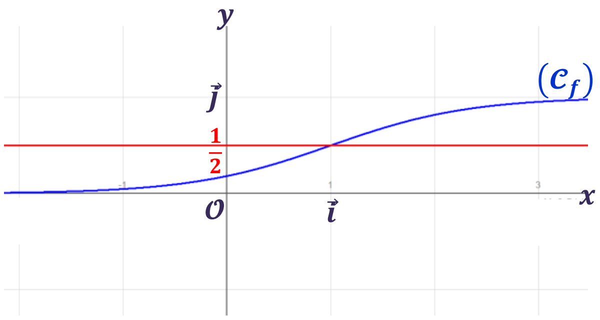
On a f_n est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier alors on aura toujours $(n-x)\,\epsilon\,\mathbb{R}\ \ et\ \ (n+x)\,\epsilon\,\mathbb{R}$ à partir du moment où x appartient à $\mathbb{R}$ quelquesoit n dans $\mathbb{N}$. soit $n\,\epsilon\,\mathbb{N}^*$

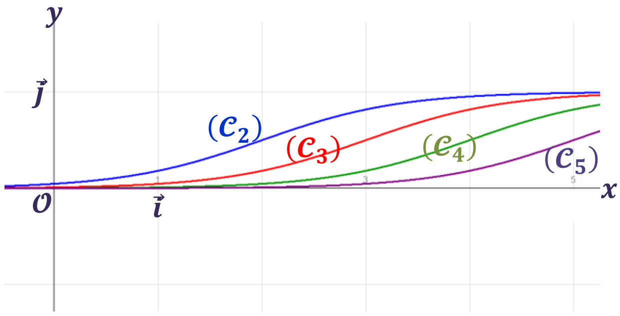
$$\begin{aligned}f_n(n-x)+f_n(n+x) &= \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(n-x-n)}}+\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(n+x-n)}}\\ &= \frac{1}{1+e^{\frac{3}{2}x}}+\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}x}}\\ &= \frac{\left(1+e^{\frac{-3}{2}x}\right)+\left(1+e^{\frac{3}{2}x}\right)}{\left(1+e^{\frac{3}{2}x}\right)\left(1+e^{\frac{-3}{2}x}\right)}\\ &= \frac{2+e^{\frac{-3}{2}x}+e^{\frac{3}{2}x}}{2+e^{\frac{-3}{2}x}+e^{\frac{3}{2}x}} = 1\end{aligned}$$

Ainsi $f_n(n-x)+f_n(n+x) = 2\times\frac{1}{2}$ Donc la courbe representant f dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est symetrique par rapport à $I_n\left(n,\frac{1}{2}\right)$

La Question : 2) b)

La représentation graphique de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ representant la fonction $\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-1)}}$ dans un repère orthonormé $(\mathcal{O},\vec{\imath},\vec{\jmath})$.





La Question : 2) c)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire définie par l'intersection de la courbe $(\mathcal{C}_1)$ et les droites d'équations : $x=0\,,x=1\ \ et\ \ y=0$
$\mathcal{A}=\int_0^1|f_1(x)|\,dx=\int_0^1 f_1(x)\,dx$ car f_1 est positive sur $[0,1]$. par un procédé de changement de variables, on pose $t=e^{\frac{-3}{2}(x-1)}$:

$$\frac{dt}{dx}=\left(e^{\frac{-3}{2}(x-1)}\right)'=\frac{-3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-1)}=\frac{-3t}{2}$$

$$Ainsi\ :\ dx=\left(\frac{-2}{3}\right)\frac{dt}{t}$$

$$On\ a\ aussi\ :\ \left|\begin{array}{l}x=0\ \Leftrightarrow\ t=e^{\frac{3}{2}}\\ x=1\ \Leftrightarrow\ t=1\end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\mathcal{A}=\int_0^1\left(\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-1)}}\right)dx &= \int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{1+t}\right)\left(\frac{-2dt}{3t}\right)\\ &= \frac{-2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{t(t+1)}\right)dt\\ &= \frac{-2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{1+t}\right)dt\\ &= \frac{-2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{t}\right)dt+\frac{2}{3}\int_{e^{\frac{3}{2}}}^1\left(\frac{1}{1+t}\right)dt\\ &= \frac{-2}{3}[\ln|t|]_{e^{\frac{3}{2}}}^1+\frac{2}{3}[\ln|t+1|]_{e^{\frac{3}{2}}}^1\\ &= \frac{-2}{3}\left(0-\frac{3}{2}\right)+\frac{2}{3}\left(\ln 2-\ln\left(1+e^{\frac{3}{2}}\right)\right)\\ &= 1+\frac{2}{3}\ln\left(\frac{2}{1+e^{\frac{3}{2}}}\right)\\ &\approx 0{,}327\end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Soit g_n la fonction définie dans $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ qui, à tout nombre réel x, associe son image $(f_n(x)-x)$.

$$g_n\ :\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R}\\ x & \longmapsto & f_n(x)-x\end{array}$$

$g_n(x)$ est continue et est dérivable sur $\mathbb{R}$ car $f_n(x)$ et x le sont.

$$g_n'(x) = f_n'(x) - 1 = \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} - 1$$

$$= \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - \left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$= \frac{\frac{3}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - 1 - 2e^{\frac{-3}{2}(x-n)} - e^{-3(x-n)}}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2}$$

$$= \frac{-\left(\frac{1}{2}e^{\frac{-3}{2}(x-n)} + 1 + e^{-3(x-n)}\right)}{\left(1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}\right)^2} < 0$$

Donc : $(\forall x \epsilon \mathbb{R})$; $g_n'(x) < 0$ d'où g_n est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. Alors comme g_n est continue et elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$ alors c'est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

$$g_n(]-\infty,+\infty[) = \left]\lim_{x\to+\infty} g_n(x) \; ; \; \lim_{x\to-\infty} g_n(x)\right[= \mathbb{R}$$

En réalité, g_n est une bijection de n'importe quel intervalle $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $g_n(I)$.
On pose $I =]0,n[\subset \mathbb{R}$, Alors $g_n :]0,n[\mapsto g_n(]0,n[)$ est une bijection.

$$g_n(]0,n[) = \left]\lim_{x\to n^-} g_n(x) \; ; \; \lim_{x\to 0^+} g_n(x)\right[$$

$$= \left]\frac{1}{2} - n \, ; \, \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[$$

c-à-d $g_n :]0,n[\mapsto \left]\frac{1}{2} - n \; ; \; \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[$ est une bijection .
Et d'après la définition d'une bijection on conclut que :

$$\left(\forall\, y \,\epsilon \left]\frac{1}{2} - n \; ; \; \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[\right), (\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0,n[\,) : g_n(u_n) = y$$

En particulier, pour $y = 0$ (car $\frac{1}{2} - n < 0 < \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}$)

On écrit : $0 \,\epsilon \left]\frac{1}{2} - n \; ; \; \frac{1}{1+e^{\frac{3n}{2}}}\right[$

$$\Rightarrow \; (\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0,n[\,) \; : \; g_n(u_n) = 0$$
$$\Rightarrow \; (\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0,n[\,) \; : \; f_n(u_n) - u_n = 0$$
$$\Rightarrow \; (\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0,n[\,) \; : \; f_n(u_n) = u_n$$

C'est l'élégance qui m'a conduit à répondre ainsi. Sinon, si vous aimeriez être typique, vous pouvez répondre comme suit : On pose $g_n(x) = f_n(x) - n$. la fonction g_n est continue sur $]0,n[$ il est trop facile de démontrer que $g_n(0) \times g_n(n) < 0$ Donc d'après le TVI on écrit : $\exists\, u_n \,\epsilon\,]0,n[$; $g_n(u_n) = 0$ comme g_n est continue et est strictement décroissante $(g_n'(x) < 0)$ Alors u_n est unique (g_n bijective) . D'où : $\exists!\; u_n \,\epsilon\,]0,n[$; $f_n(u_n) = u_n$

La Question : 3) b)

$$-1 < 0 \;\Rightarrow\; x - n - 1 < x - n$$
$$\Rightarrow\; \frac{-3}{2}(x-n-1) > \frac{-3}{2}(x-n)$$
$$\Rightarrow\; e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)} > e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$$
$$\Rightarrow\; 1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)} > 1 + e^{\frac{-3}{2}(x-n)}$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n-1)}} < \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(x-n)}}$$
$$\Rightarrow\; f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

La Question : 3) c)

$$n \,\epsilon\, \mathbb{N}^* \;\Rightarrow\; u_n < n$$
$$\Rightarrow\; f_n(u_n) < f_n(n) \; ; \; car \; f_n \; est \nearrow$$
$$\Rightarrow\; u_n < \frac{1}{2} \; ; \; car \; \left| \begin{array}{l} f_n(u_n) = u_n \\ f_n(n) = \frac{1}{2} \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow\; \left| \begin{array}{l} 0 < u_n < \frac{1}{2} \\ 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2} \end{array} \right.$$
$$\Rightarrow\; (u_{n+1} - u_n) < 1$$
$$\Rightarrow\; u_{n+1} - 1 < u_n$$
$$\Rightarrow\; u_{n+1} - 1 - n < u_n - n$$
$$\Rightarrow\; \frac{-3}{2}(u_{n+1} - (1+n)) > \frac{-3}{2}(u_n - n)$$
$$\Rightarrow\; e^{\frac{-3}{2}(u_{n+1}-(1+n))} > e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}$$
$$\Rightarrow\; \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_{n+1}-(1+n))}} < \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}}$$
$$\Rightarrow\; f_{n+1}(u_{n+1}) < f_n(u_n)$$
$$\Rightarrow\; u_{n+1} < u_n \; ; \; car \; \left| \begin{array}{l} f_{n+1}(u_{n+1}) = u_{n+1} \\ f_n(u_n) = u_n \end{array} \right.$$

D'où : $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$; $u_{n+1} < u_n$ C-à-d $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}^*}$ est une suite strictement décroissante et comme elle est minorée par 0 (car $(\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)$; $0 < u_n < \frac{1}{2}$).
Alors elle est convergente.

La Question : 3) d)

On part du fait que $f_n(u_n) = u_n$
C-à-d : $\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}} = u_n$. par passage aux limites, on retrouve bien :

$$\lim_{n\infty}\left(\frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(u_n-n)}}\right) = \lim_{n\infty}(u_n)$$

$$\Rightarrow\; \frac{1}{1+e^{\frac{-3}{2}(l-\infty)}} = l$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e^{+\infty}} = l$$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+\infty} = l$$

$$\Rightarrow \frac{1}{+\infty} = l$$

$$\Rightarrow 0 = l$$

$$D'où\ finalement\ :\ \lim_{n\infty}(u_n) = 0$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1)

On démontre la parité de la fonction g à l'aide d'un procédé de changement de variable.

$$g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt$$

$$On\ pose\ :\ l = -t \Rightarrow dt = -dl$$

$$\left| \begin{array}{l} \dfrac{\cos t}{t} = \dfrac{\cos(-l)}{-l} = \dfrac{\cos l}{-l} = \dfrac{-\cos l}{l} \\ t = -x \Leftrightarrow l = x \\ t = -3x \Leftrightarrow l = 3x \end{array} \right.$$

$$g(-x) = \int_{-x}^{-3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt = \int_{x}^{3x} \left(\frac{-\cos l}{l}\right)(-dl)$$

$$= \int_{x}^{3x} \left(\frac{\cos l}{l}\right) dl = g(x)$$

$$= \int_{x}^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt\ ;\quad Si\ vous\ n'êtes\ pas\ dérrangés\ t\ et\ l\ sont\ deux\ variables\ muettes$$

$$= g(x)$$

Comme $g(-x) = g(x)$; $\forall x \epsilon \mathbb{R}^*$ Alors g est une fonction paire sur $\mathbb{R}^*$: C-à-d la courbe $(\mathcal{C}_g)$ est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

La Question : 2)

Soit φ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\varphi(x) = \frac{\cos t}{t}$ et soit a un élément de $]0,+\infty[$. la fonction φ est bien définie et est continue sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions toutes continues sur $]0,+\infty[$. Donc φ admet des primitives sur $]0,+\infty[$. En particulier, φ admet une primitive ψ sur $]0,+\infty[$ qui s'annule en a et qui est définie comme suit :

$\begin{cases} \psi(x) = \int_a^x \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ \psi(a) = 0 \end{cases}$ la fonction ψ est dérivables et admet φ comme dérivée sur $]0,+\infty[$.

C-à-d : $\psi'(x) = \frac{\cos x}{x} = \varphi(x)$; $\forall x > 0$.

ou encore : $\frac{d}{dt}\left(\int_a^x \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt\right) = \frac{\cos x}{x}$.

Et voici un récapitulatif :

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ &= \int_x^{a} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt + \int_a^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ &= -\int_a^{x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt + \int_a^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt \\ &= -\psi(x) + \psi(3x) \\ &= \psi(3x) - \psi(x) \end{aligned}$$

ψ est dérivable sur $]0,+\infty[$, Donc $\psi(3x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant la composée de deux fonctions toutes définies et dérivables sur $]0,+\infty[$. Donc $x \mapsto \psi(3x) - \psi(x)$ est dérivable comme étant différence de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.

Ainsi : $g'(x) = \left(\psi(3x) - \psi(x)\right)'$

$$\begin{aligned} &= 3x \cdot \psi'(3x) - \psi'(x) \\ &= 3x \cdot \varphi(3x) - \varphi(x) \\ &= 3x \cdot \frac{\cos 3x}{3x} - \frac{\cos x}{x} \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

Soit x un élément de $]0,+\infty[$,

$$g(x) = \int_x^{3x} \left(\frac{\cos t}{t}\right) dt = \int_x^{3x} \Big(\underbrace{\cos t}_{v'(t)}\Big)\Big(\underbrace{\frac{1}{t}}_{u(t)}\Big) dt$$

$$\begin{aligned} &= [u(t) \times v(t)]_x^{3x} - \int_x^{3x} u'(t) \times v(t)\, dt \\ &= \left[\frac{\sin t}{t}\right]_x^{3x} - \int_x^{3x} \frac{-\sin t}{t^2} dt \\ &= \left(\frac{\sin(3x)}{3x} - \frac{\sin x}{x}\right) + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \\ &= \left(\frac{\sin(3x) - 3\sin x}{3x}\right) + \int_x^{3x} \frac{\sin t}{t^2} dt \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

Soit x un élément de $]0,\infty[$ On a : $|\sin t| \leq 1 \rightsquigarrow (1)$

Aussi : $x \leq t \Rightarrow x^2 \leq t^2 \Rightarrow \frac{1}{t^2} \leq \frac{1}{x^2} \rightsquigarrow (2)$

$$\begin{aligned} (1) \times (2) &\Rightarrow \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| \leq \frac{1}{x^2} \\ &\Rightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt \leq \int_x^{3x} \left(\frac{1}{x^2}\right) dt \\ &\Rightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt \leq \left(\frac{1}{x^2}\right) \int_x^{3x} 1\, dt \\ &\Rightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt \leq \left(\frac{1}{x^2}\right)(3x - x) \\ &\Rightarrow \int_x^{3x} \left|\frac{\sin t}{t^2}\right| dt \leq \frac{2}{x} \end{aligned}$$

Récapitulatif :

$$\begin{aligned}
|g(x)| &= \left|\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t}{t}\right)dt\right| \\
&= \left|\left(\frac{\sin(3x)-3\sin x}{3x}\right)+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\right| \\
&= \left|\frac{\sin 3x}{3x}-\frac{\sin x}{x}+\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\right| \\
&\le \left|\frac{\sin 3x}{3x}\right|+\left|\frac{\sin x}{x}\right|+\left|\int_x^{3x}\frac{\sin t}{t^2}\,dt\right| \\
&\le \left|\frac{1}{3x}\right|+\left|\frac{1}{x}\right|+\int_x^{3x}\left|\frac{\sin t}{t^2}\right|dt \\
&\le \frac{1}{3x}+\frac{1}{x}+\frac{2}{x} \\
&\le \frac{10}{3x}
\end{aligned}$$

D'où : $(\forall x>0)\ ;\ |g(x)|\le\frac{10}{3x}$

$$comme\ :\ |g(x)|\le\frac{10}{3x}$$

$$Alors\ :\ \underbrace{0}_{\substack{x\to+\infty \\ \searrow\ 0}}\le|g(x)|\le\underbrace{\left(\frac{10}{3x}\right)}_{\substack{x\to+\infty \\ \searrow}}$$

$$ou\ encore\ :\ \underbrace{\left(\frac{-10}{3x}\right)}_{\substack{x\to+\infty \\ \searrow\ 0}}\le g(x)\le\underbrace{\left(\frac{10}{3x}\right)}_{\substack{x\to+\infty \\ \searrow\ 0}}$$

$$D'où :\ \lim_{x\to+\infty} g(x)=0$$

La Question : 4) a)

D'une part : $\cos t\le 1 \implies 1-\cos t\ge 0$

$$\implies \frac{1-\cos t}{t}\ge 0\ ;\ car\ \left|\begin{array}{l} x\le t\le 3x \\ x>0\end{array}\right.$$

$$\implies (1):\ \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt\ge 0\ ;\ car\ 0<x<3x$$

D'autre part :

$$1-\cos t\le t \implies \frac{1-\cos t}{t}\le 1\ ;\ car\ t\ge x>0$$

$$\implies \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt\le\int_x^{3x}1\,dt$$

Car $x<3x$ et la fonction $\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)$ est continue sur $]0,+\infty[$

$$\implies \int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt\le 2x$$

$$(1)\ et\ (2) \implies (\forall x>0)\ ;\ 0\le\int_x^{3x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt\le 2x$$

La Question : 4) b)

$$\begin{aligned}
\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)dt &= \int_x^{3x}\left(\frac{\cos t}{t}\right)dt-\int_x^{3x}\left(\frac{1}{t}\right)dt \\
&= g(x)-[\ln|t|]_x^{3x} \\
&= g(x)-(\ln 3x-\ln x)\ ;\ x\ne 0 \\
&= g(x)-\ln\left(\frac{3x}{x}\right)\ ;\ x\ne 0 \\
&= g(x)-\ln 3
\end{aligned}$$

La Question : 4) c)

$$(\forall x>0)\ ;\ \underbrace{0}_{\substack{x\to 0^+ \\ \searrow\ 0}}\le\int_x^{2x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt\le\underbrace{2x}_{\substack{x\to 0^+ \\ \searrow\ 0}}$$

$$Donc\ :\ \lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^{2x}\left(\frac{1-\cos t}{t}\right)dt\right)=0$$

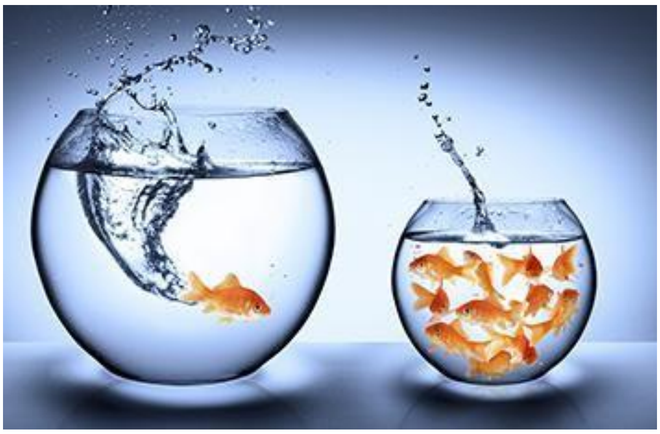
$$Aussi\ :\ \lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^{2x}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)dt\right)=0$$

$$comme\ :\ g(x)-\ln 3=\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)dt$$

$$Alors\ :\ \lim_{x\to 0^+}(g(x)-\ln 3)=\lim_{x\to 0^+}\left(\int_x^{3x}\left(\frac{\cos t-1}{t}\right)dt\right)$$

$$C-à-d\ :\ \lim_{x\to 0^+}(g(x)-\ln 3)=0$$

$$Ou\ encore\ :\ \lim_{x\to 0^+}g(x)=\ln 3$$



2016 N

Le Premier Exercice

La Question : 1)

Tout d'abord, E est une partie non-vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ puisque c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 qui s'écrivent sous la forme $M(x,y)$ et $M(0,0) = \mathcal{O} \in E$.
soient (x,y) et (a,b) deux éléments de E :

$$M(x,y) - M(a,b) = \begin{pmatrix} x+y-a-b & 0 & -2y+2b \\ 0 & 0 & 0 \\ y-b & 0 & x-y-a+b \end{pmatrix}$$

$$= M(x-a\ ;\ y-b) \in E \quad car \left| \begin{array}{l} (x-a) \in \mathbb{R} \\ (y-b) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

D'où : $(E,+)$ est un sous-groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

La Question : 2)

$$M(x,y) \times M(x',y') =$$

$$= \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 0 & -2y' \\ 0 & 0 & 0 \\ y' & 0 & x'-y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x+y)(x'+y') - 2yy' & 0 & -2y'(x+y) - 2y(x'-y') \\ 0 & 0 & 0 \\ y(x'+y') + y'(x-y) & 0 & -2yy' + (x-y)(x'-y') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (xx'-yy') + (xy'+yx') & 0 & -2(xy'+yx') \\ 0 & 0 & 0 \\ (xy'+yx') & 0 & (xx'-yy') - (xy'+yx') \end{pmatrix}$$

$$= M(xx'-yy'\ ;\ xy'+yx') \in E \ ; \quad car \left| \begin{array}{l} xx'-yy' \in \mathbb{R} \\ xy'+yx' \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

La Question : 3) a)

Soient $z = x+iy$ et $z' = z' + iy'$ deux éléments de $\mathbb{C}^*$ et soit φ l'application suivante :

$$\begin{array}{rcl} \varphi :\ (\mathbb{C}^*,\times) & \longmapsto & (E,\times) \\ z = x+iy & \longmapsto & \varphi(z) = M(x,y) \end{array}$$

$$\begin{aligned} \varphi(z \times z') &= \varphi\big((x+iy)(x'+iy')\big) \\ &= \varphi\big((xx'-yy') + i(xy'+yx')\big) \\ &= M(xx'-yy'\ ;\ xy'+yx') \\ &= M(x,y) \times M(x',y')\ ;\ d'après\ 2) \\ &= \varphi(z) \times \varphi(z') \end{aligned}$$

Ainsi φ est 1 homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(E,\times)$

La Question : 3) b)

Soit $M(a,b)$ un élément de E^* .
l'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une seule solution $x+iy = a+ib$ Donc :
$(\forall M(a,b) \in E^*), (\exists!\ (x+iy) \in \mathbb{C}^*) :\ \varphi(x+iy) = M(a,b)$
c-à-d que φ est une bijection de $\mathbb{C}^*$ dans E^* .
Dés lors : $\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.
comme φ est un homomorphisme de $\mathbb{C}^*$ dans E
et comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif,
alors la structure algébrique de $(\mathbb{C}^*,\times)$ sera transmise vers $(E^*,\times)$ via l'application φ.
$(\mathbb{C}^*,\times)$ groupe commutatif $\Rightarrow$ $(E^*,\times)$ Aussi .
$(1+i0)$ est l'élément neutre de $(\mathbb{C}^*,\times)$ $\Rightarrow$
$\varphi(1+i0) = M(1,0)$ est l'élément neutre pour $(E^*,\times)$

La Question : 4)

$(E,+,\times)$ est un groupe commutatif car :

$$car\ : \left| \begin{array}{l} \blacksquare\ (E,+)\ est\ un\ groupe \\ \blacksquare\ (E^*,\times)\ est\ un\ groupe\ commutatif \\ \blacksquare\ \times\ est\ distributive\ par\ rapport\ à + \\ \blacksquare\ \times\ est\ commutative\ dans\ E \end{array} \right.$$

La distributivité de × par rapport à + :

$$\begin{aligned} & M(a,b) \times \big(M(x,y) + M(x',y')\big) \\ &\quad = M(a,b) \times M(x+x'\ ;\ y+y') \\ &\quad = M\big(a(x+x') - b(y+y')\ ;\ a(y+y') + b(x+x')\big) \\ &\quad = M(ax+ax'-by-by'\ ;\ ay+ay'+bx+bx') \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & M(a,b) \times M(x,y) + M(a,b) \times M(x',y') \\ &\quad = M(ax-by\ ;\ ay+bx) + M(ax'-by'\ ;\ ay'+bx') \\ &\quad = M(ax-by+ax'-by'\ ;\ ay+bx+ay'+bx') \end{aligned}$$

Donc la distributivité à gauche est vérifiée.
Même procédé pour la distributivité à droite.
Pour la commutativité de × dans E , on a :

$$\begin{aligned} M(x,y) \times M(x',y') &= M(xx'-yy'\ ;\ xy'+yx') \\ &= M(xx'-yy'\ ;\ y'x+x'y) \\ &= M(x',y') \times M(x,y) \end{aligned}$$

La Question : 5) a)

$$A \times M(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x+y & 0 & -2y \\ 0 & 0 & 0 \\ y & 0 & x-y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \mathcal{O}$$

La Question : 5) b)

Soient $M(x,y)$ une matrice de E et $M(x',y')$ son symetrique dans E.

$$\Leftrightarrow \quad M(x,y)\times M(x',y') = M(x',y')\times M(x,y) = I$$
$$\Leftrightarrow \quad M(x,y)\times M(x',y') = I \ \ car \ \times \ est\ commutative$$
$$\Rightarrow \quad A\times M(x,y)\times M(x',y') = A\times I = A$$
$$\Rightarrow \quad \mathcal{O}\times M(x',y') = A$$
$$\Rightarrow \quad \mathcal{O} = A$$
$$\Rightarrow \quad 0 = 1 \ ; \ c'est\ absurde$$

Donc $M(x,y)$ n'est pas inversible (n'admet pas de symetrique)

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{aligned} 173/(a^3+b^3) &\Rightarrow (a^3+b^3)\equiv 0[173] \\ &\Rightarrow a^3 \equiv -b^3[173] \\ &\Rightarrow (a^3)^{57} \equiv (-b^3)^{57}[173] \\ &\Rightarrow a^{171} \equiv -b^{171}[173] \end{aligned}$$

La Question : I) 2)

$$\begin{aligned} 173/a &\Leftrightarrow 173/a^3 \ ; \ 173 \in \mathbb{P} \\ &\Leftrightarrow a^3 \equiv 0[173] \\ &\Leftrightarrow (a^3+b^3)\equiv a^3[173] \ \ car\ b^3 \equiv a^3[173] \\ &\Leftrightarrow b^3 \equiv 0[173] \\ &\Leftrightarrow 173/b^3 \\ &\Leftrightarrow 173/b\ ; \ \ car\ 173 \in \mathbb{P} \end{aligned}$$

La Question : I) 3)

$$173/a \ \Rightarrow \ 173/b \ ; \ d'après\ 2)$$
$$\Rightarrow \left|\begin{array}{l} 173/a \\ 173/b \end{array}\right.$$
$$\Rightarrow \ 173\ divise\ toute\ combinaison\ linéaire\ en\ a\ et\ b$$
$$\Rightarrow \ 173/(a+b)$$

La Question : I) 4) a)

Rappel du Théorème de Fermat :

$$\left|\begin{array}{l} p \in \mathbb{P} \\ a\wedge p = 1 \end{array}\right. \ \Rightarrow \ a^{p-1} \equiv 1[p]$$

Comme 173 ne divise pas le nombre a, alors 173 ne divise pas b à cause de l'équivalence de la question 2) : $173/a \ \Leftrightarrow \ 173/b$

On peut Donc écrire : $\left|\begin{array}{l} 173\wedge a = 1 \\ 173\wedge b = 1 \end{array}\right.$

Ainsi d'après Fermat : $\begin{cases} a^{172} \equiv 1[173] \\ a^{172} \equiv 1[173] \end{cases}$

D'où : $a^{172} \equiv b^{172}[173]$

La Question : I) 4) b)

$$\begin{cases} a^{171} \equiv -b^{171}[173] \\ a^{172} \equiv b^{172}[173] \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a(a^{171}) \equiv -a(b^{171})[173] \\ a^{172} \equiv b^{172}[173] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} a^{172} \equiv -a(b^{171})[173] \\ a^{172} \equiv b^{172}[173] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \ b^{172} \equiv -a(b^{171})[173] \ ; \ la\ transitivité$$
$$\Rightarrow \ 173/b^{171}(a+b)$$
$$\Rightarrow \ b^{171}(a+b) \equiv 0[173]$$

La Question : I) 4) c)

$$173\wedge b = 1 \ \Rightarrow \ 173\wedge b^{171} = 1$$
$$\Rightarrow \ 173/(a+b) \ ; \ car \left|\begin{array}{l} 173/b^{171}(a+b) \\ \ \ c'est\ Gauss \end{array}\right.$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

$$\begin{aligned} (x,y)\ est\ solution\ de\ (E) &\Rightarrow x^3+y^3 = 173(xy+1) \\ &\Rightarrow (x+y)(x^2-xy+y^2) = 173(xy+1) \\ &\Rightarrow 173k((x-y)^2+xy) = 173(xy+1) \\ &\Rightarrow k(x-y)^2+kxy = xy+1 \\ &\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy = 1 \end{aligned}$$

La Question : II) 2)

$$k \in \mathbb{N}^* \ \Rightarrow \ k \geq 1 \ \Rightarrow \left|\begin{array}{l} ou\ bien\ \ k = 1 \\ ou\ bien\ \ k > 1 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} Si\ \ k > 1 \ &\Rightarrow \ (k-1) > 0 \\ &\Rightarrow \left|\begin{array}{l} et\ (k-1)xy > 0 \\ et\ \ k(x-y)^2 > 1 \ ; \ x \neq y \end{array}\right. \\ &\Rightarrow k(x-y)^2+(k-1)xy > 1 \\ &\Rightarrow 1 > 1 \ ; \ c'est\ absurde \\ &\Rightarrow k = 1 \ ; \ c'est\ le\ cas\ restant \\ &\Rightarrow \begin{cases} x+y = 173\times 1 \\ 1(x-y)^2+(1-1)xy = 1 \end{cases} \\ &\Rightarrow \begin{cases} x+y = 173 \\ (x-y)^2 = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } \begin{cases} x+y=173 \\ x-y=1 \end{cases} \\ \text{ou bien } \begin{cases} x+y=173 \\ x-y=-1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } (x,y)=(87{,}86) \\ \text{ou bien } (x,y)=(86{,}87) \end{cases}$$

soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{N}^{2*}$. Le résultat est :

$$(x,y)\,\epsilon\,\mathcal{S} \;\Rightarrow\; \begin{cases} ou\ bien\ (x,y)=(87{,}86) \\ ou\ bien\ (x,y)=(86{,}87) \end{cases}$$

Inversement : $\left| \begin{array}{l} 87^3+86^3=1294559 \\ 173(87\times 86+1)=1294559 \end{array}\right.$

Ainsi : $87^3+86^3=173(87\times 86+1)$.
C-à-d que : $(87{,}86)\,\epsilon\,\mathcal{S}\ \ et\ \ (86{,}87)\,\epsilon\,\mathcal{S}$

La conclusion : $\mathcal{S}=\{(87{,}86)\,;\,(86{,}87)\}$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

$$\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=\left(\frac{z_1-\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}{z_2-\dfrac{2z_1z_2}{z_1+z_2}}\right)\times\left(\frac{z_2}{z_1}\right)$$

$$=\frac{z_1(z_1+z_2)-2z_1z_2}{z_2(z_1+z_2)-2z_1z_2}\times\frac{z_2}{z_1}$$

$$=\frac{z_1}{z_2}\times\frac{z_1+z_2-2z_2}{z_1+z_2-2z_1}\times\frac{z_2}{z_1}$$

$$=\frac{z_1+z_2-2z_2}{z_1+z_2-2z_1}$$

$$=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_1}$$

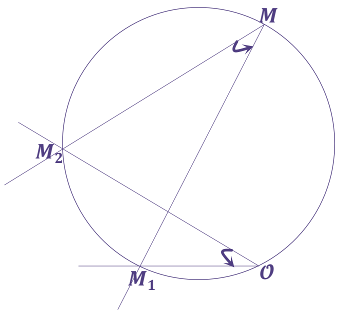
$$=-1$$

La Question : 1) b)

$$\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1 \Leftrightarrow \left(\frac{z_{M_1}-z_M}{z_{M_2}-z_M}\right)\times\left(\frac{z_{M_2}-z_O}{z_{M_1}-z_O}\right)=-1\,\epsilon\,\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien\ M,M_1,M_2\ et\ O\ sont\ colinéaires \\ ou\ bien\ M,M_1,M_2\ et\ O\ sont\ cocycliques \end{cases}$$

$O,M_1\ et\ M_2$ Sont supposés différents deux à deux dans l'énoncé . Alors $M,M_1,M_2\ et\ O$ ne peuvent être colinéaires. D'où les 4 points sont cocycliques . Autrement-dit : M appartient au cercle circonscrit au triangle OM_1M_2



$$\left(\widehat{\overrightarrow{MM_2},\overrightarrow{MM_1}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{OM_2},\overrightarrow{OM_1}}\right)\ [\pi]$$

La Question : 2)

$$z_2=\overline{z_1} \;\Rightarrow\; \bar{z}=\overline{\left(\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}\right)}=\frac{2\overline{z_1}\,\overline{z_2}}{\overline{z_1}+\overline{z_2}}=\frac{2\overline{z_1}\,\overline{\overline{z_1}}}{\overline{z_1}+\overline{\overline{z_1}}}$$

$$=\frac{2\overline{z_1}z_1}{\overline{z_1}+z_1}=\frac{2|z_1|^2}{2\Re e(z_1)}\,\epsilon\,\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\; z\,\epsilon\,\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\; M\,\epsilon\,(l'axe\ réelle)$$

La Question : 3) a)

Soit r la rotation définie comme suit :

$$r(\theta,\alpha)\ :\ \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \mapsto & M'(z') \end{array}$$

$$r(M_1)=M_2 \;\Leftrightarrow\; \left(z_{M_2}-z_O\right)=e^{i\alpha}\left(z_{M_1}-z_O\right)$$

$$\Leftrightarrow\; z_2=e^{i\alpha}z_1$$

La Question : 3) b)

$$\frac{z_1-z}{z_2-z}\times\frac{z_2}{z_1}=-1 \;\Leftrightarrow\; \frac{z_1-z}{z_2-z}=\frac{-z_1}{z_2}$$

$$\Rightarrow\; \left|\frac{z_1-z}{z_2-z}\right|=\left|\frac{-z_1}{z_2}\right|=\left|\frac{-1\cdot z_1}{e^{i\alpha}\cdot z_1}\right|=\left|e^{-i\alpha}\right|=1$$

$$\Rightarrow\; \left|\frac{z_1-z}{z_2-z}\right|=1$$

$$\Rightarrow\; |z_1-z|=|z_2-z|$$

$$\Rightarrow\; MM_1=MM_2$$

$$\Rightarrow\; M\ \epsilon\ la\ médiatrice\ de\ [M_1M_2]$$

La Question : 4) a)

$$\left| \begin{array}{l} z_1\ \ et\ \ z_2\ \ sont \\ solutions\ de\ (G) \end{array}\right. \;\Rightarrow\; \begin{cases} z_1+z_2=\dfrac{--\left(e^{i\theta}+1\right)}{6} \\ z_1z_2=\dfrac{e^{i\theta}-1}{6} \end{cases}$$

$$\Rightarrow\; z=\frac{2z_1z_2}{z_1+z_2}=\frac{2\left(e^{i\theta}-1\right)}{e^{i\theta}+1}$$

La Question : 4) b)

Rappel des formules d'Euler :

$$\begin{cases} e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \\ e^{ix} + e^{iy} = 2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} \end{cases}$$

$$z = 2\left(\frac{e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}+1}\right) = 2\left(\frac{e^{i\theta}-e^{i0}}{e^{i\theta}+e^{i0}}\right)$$

$$= 2\left(\frac{2i\sin\left(\frac{\theta-0}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+0}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\theta-0}{2}\right)e^{i\left(\frac{\theta+0}{2}\right)}}\right)$$

$$= 2i\cdot\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= 2e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)}\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{i0}$$

$$= 2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\cdot e^{\left(\frac{i\pi}{2}\right)}$$

$$= \left[2\tan\left(\frac{\theta}{2}\right);\frac{\pi}{2}\right]$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

La fonction $\varphi : t \mapsto e^{-t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier comme étant la composée de deux fonctions dérivables bien définies sur $\mathbb{R}$ $\left(e^{-\mathbb{R}} \subseteq \mathbb{R}\right)$.
On peut ainsi appliquer le **TAF** sur n'importe quel intervalle I inclus dans $\mathbb{R}$. Soit x un réel strictement positif :

$$\begin{cases} \varphi \text{ est continue sur } [0,x] \\ \varphi \text{ est dérivable sur }]0,x[\end{cases}$$

$$\Rightarrow \exists\,\theta \in]0,x[\;;\; \left(\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0}\right) = \varphi'(\theta)$$

$$\Rightarrow 0<\theta<x \;;\; \left(\frac{e^{-x}-1}{x}\right) = -e^{-\theta}$$

$$\Rightarrow 0<\theta<x \;;\; \left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right) = e^{\theta}$$

La Question : I) 2) a)

$$\theta>0 \Rightarrow e^{\theta}>1 \Rightarrow \frac{x}{1-e^{-x}}>1$$

$$\Rightarrow x > 1-e^{-x} > 0 \;;\; car\ x>0$$

La Question : I) 2) b)

$$\theta<x \Rightarrow e^{\theta}<e^{x} \Rightarrow \frac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$$

$$\Rightarrow x<e^{x}-1\;;\; \begin{cases} avec\ 1-e^{-x}>0 \\ car\ x>0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x+1<e^{x}$$

La Question : I) 2) c)

$$0<\theta<x \Rightarrow e^{0}<e^{\theta}<e^{x}\;; Exp\ est\ continue\ et\ \nearrow$$

$$\Rightarrow 1<\frac{x}{1-e^{-x}}<e^{x}$$

$$\Rightarrow \ln 1<\ln\left(\frac{x}{1-e^{-x}}\right)<\ln(e^{x})$$

$$\ln\ est\ continue\ sur\ \mathbb{R}_*^+\ est\ \nearrow$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)$$

$$= \lim_{x\to0^+}\frac{e^x}{\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)} = \frac{\lim_{x\to0^+} e^x}{\lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^x-e^0}{x-0}\right)}$$

$$= \frac{e^0}{(e^x)'_{/x=0}} = \frac{e^0}{e^0} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0 .

La Question : II) 1) b)

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}-x\right)$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}\right) = 0$$

Donc la droite $(\Delta) : y = x$ est une asymptote pour $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

La Question : II) 2) a)

Soient $t>0\ et\ x>0$.

$$\Rightarrow 1-t<e^{-t}\;;\; \text{d'après I)2)a)}$$

$$\Rightarrow \int_0^x (1-t)\,dt < \int_0^x (e^{-t})\,dt$$

J'ai le droit d'introduire l'intégrale $\int_0^x dt$ car ces deux quantités sont intégrables (la continuité est vérifiée). L'orde n'a pas changé à cause de $0<x$

$$\Longrightarrow \left[t-\frac{t^2}{2}\right]_0^x < -[e^{-t}]_0^x$$

$$\Longrightarrow \left(x-\frac{x^2}{2}\right) < -e^{-x}+1 \ ; \ (1)$$

De même, Soient $t > 0$ *et* $x > 0$.

$$\Longrightarrow \ 0 < \ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right) \ ; \ d'après\ I)2)c)$$

$$\Longrightarrow \ e^0 < e^{\ln\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)}$$

$$\Longrightarrow \ 1 < \frac{xe^x}{e^x-1}$$

$$\Longrightarrow \ 1 < \frac{x\cdot e^x}{e^x\cdot(1-e^{-x})}$$

$$\Longrightarrow \ 1 < \frac{x}{1-e^{-x}}$$

On multiplie les deux côtés de cette inégalité par le nombre positif $(1-e^{-x})$, il est positif car $x > 0$.

$$\Longrightarrow \ (1-e^{-x}) < x$$

$$\Longrightarrow \ (2) : \ -e^{-x}+1 < x \ ; \ joliment$$

$$(1)\ et\ (2) \ \Longrightarrow \ \forall x > 0 \ ; \ x-\frac{x^2}{2} < -e^{-x}+1 < x$$

Pour $x = 0$, On a : $x-\frac{x^2}{2} = -e^{-x}+1 = x = 0 \ \ (\blacksquare)$

On écrit finalement :

$$(\forall x \geq 0) \ ; \quad x-\frac{x^2}{2} \leq -e^{-x}+1 \leq x \ \ (\blacksquare)$$

La Question : II) 2) b)

a-t-On le droit d'intégrer la formule ■ ?
Oui, effectivement, On a le droit de le faire car les trois quantités sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}$ tout entier . Et $x > 0$ gardera le sens de l'ordre inchangeable .

$$(\blacksquare) \ \Longrightarrow \quad x-\frac{x^2}{2} \leq -e^{-x}+1 \leq x$$

$$\Longrightarrow \quad \int_0^t \left(x-\frac{x^2}{2}\right)dx < \int_0^t (-e^{-x}+1)\,dx < \int_0^t x\,dx$$

$$\Longrightarrow \quad \left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+cte\right]_0^t < [e^{-x}+x+cte]_0^t < \left[\frac{x^2}{2}+cte\right]_0^t$$

$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right) < (e^{-t}+t-1) < \left(\frac{t^2}{2}\right) \quad ; \ t > 0$$

Cette inégalité reste vraie pour $t = 0$.
Donc finalement on écrit :

$$(\forall t \geq 0) \ : \ \left(\frac{t^2}{2}-\frac{t^3}{6}\right) < (e^{-t}+t-1) < \left(\frac{t^2}{2}\right)$$

La Question : II) 3) a)

Soit $x > 0$:

$$\frac{f(x)-1}{x} = \frac{\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)-1}{x} = \frac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$$

$$= \frac{xe^x\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{xe^x}\right)}{x(e^x-1)}$$

$$= \left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)\cdot\left(\frac{xe^x-e^x+1}{x^2e^x}\right)$$

$$= \left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)\cdot\left(\frac{e^x}{e^x}\right)\cdot\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)$$

$$= \left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)f(x)$$

La Question : II) 3) b)

$$\lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right) = \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)f(x)$$

$$= \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right)\times\lim_{x\to0^+}f(x)$$

$$= \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2}$$

$$Mais\ pourquoi\ \lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-1+e^{-x}}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \ ?$$

$$x \to 0^+ \ \Longrightarrow \ x \geq 0$$

$$\Longrightarrow \ \left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}\right) \leq (e^{-x}+x-1) \leq \left(\frac{x^2}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \ \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x\right) \leq \left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right) \leq \left(\frac{1}{2}\right) \ ; \ x^2 > 0$$

$$\Longrightarrow \ \underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}x\right)}_{\xrightarrow[x\to0^+]{}\ \frac{1}{2}} \leq \left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\xrightarrow[x\to0^+]{}\ \frac{1}{2}}$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{e^{-x}+x-1}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

$$Ainsi \ : \ \lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-1}{x}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lim_{x\to0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \left|\begin{array}{l} f\ est\ dérivable\ à\ droite \\ en\ \ 0 \quad et \quad f_d'(0) = \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} (\mathcal{C}_f) \ admet \ la \ demi-droite \ (\Delta) \\ de \ coefficient \ directeur \frac{1}{2} \ comme \\ tangente \ à \ droite \ en \ (0,1) \\ (\Delta) \ : \ y = \frac{1}{2}x + f(0) \end{array} \right.$$

La Question : II) 4) a)

Comme $x \ \longmapsto \ xe^x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant produit de deux fonctions dérivables. Aussi la fonction $x \ \longmapsto \ e^x - 1$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant somme (différence de deux fonctions dérivables) ; et $\forall x > 0 \ ; \ e^x - 1 \neq 0$.
Alors f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant quotient de deux fonctions dérivables sur $]0,+\infty[$.
soit $x \in]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\frac{xe^x}{e^x - 1}\right)' = \frac{(xe^x)'(e^x - 1) - (e^x - 1)'xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{(e^x + xe^x)(e^x - 1) - (e^x)xe^x}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(1 + x)(e^x - 1) - xe^{2x}}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^x\big((1 + x)(e^x - 1) - xe^x\big)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(xe^x - x + e^x - 1 - xe^x)}{(e^x - 1)^2}$$

$$= \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2}$$

La Question : II) 4) b)

On a : $\left| \begin{array}{l} (e^x - 1)^2 \geq 0 \ ; \ toujours \\ e^x > 0 \ ; \ toujours \\ e^x > 1 + x \ ; \ II)2)b) \end{array} \right.$

$$Donc \ : \ \frac{e^x(e^x - 1 - x)}{(e^x - 1)^2} > 0 \ ; \ \forall x > 0$$

$$C-à-d \ : \ f'(x) > 0 \ ; \ \forall x > 0$$

$$C-à-d \ \ f \ est \ \nearrow \ sur \ ]0,+\infty[\ ainsi \ sur \ [0,+\infty[$$

La Troisième partie

La Question : III) 1)

Soit la proposition $P(n) : \ u_n > 0$.
Pour $n = 0$, on a $u_0 > 0$. donc l'instance $P(0)$ est vraie. Soit $n \in \mathbb{N}$ et on suppose que $P(n)$ est vraie .

$$\begin{aligned} P(n) \ est \ vraie \ & \Longrightarrow \ u_n > 0 \\ & \Longrightarrow \ f(u_n) > f(0) \ ; \ f \ est \ \nearrow [0,+\infty[\\ & \Longrightarrow \ f(u_n) > 1 \\ & \Longrightarrow \ \ln\big(f(u_n)\big) > \ln 1 \ ; \ \ln \ \ est \ \nearrow]0,+\infty[\\ & \Longrightarrow \ u_{n+1} > 0 \\ & \Longrightarrow \ P(n+1) \ \ est \ vraie \end{aligned}$$

$$Ainsi \ on \ a \ trouvé \ : \begin{cases} P(0) \ \ est \ vraie \\ P(n) \Longrightarrow P(n+1) \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Alors : $(\forall n \in \mathbb{N}) \ : \ u_n > 0$

La Question : III) 2)

$$\begin{aligned} I)2)c) \ & \Longrightarrow \ 0 < \ln(f(x)) < x \ ; \ \forall x > 0 \\ & \Longrightarrow \ 0 < \ln\big(f(u_n)\big) < u_n \ \ ; \ car \ u_n > 0 \\ & \Longrightarrow \ 0 < u_{n+1} < u_n \ \ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \\ & \Longrightarrow \ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \ est \ strictement \ \searrow \\ & \Longrightarrow \ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} \ converge \ car \ minorée \ par \ 0 \end{aligned}$$

La Question : III) 3)

f est une fonction définie sur $[0,+\infty[$.
On a d'après $I)2)c)$: $(\forall x > 0)$; $\ln(f(x)) < x$.
Autrement-dit : $\forall \ x \in]0,+\infty[$; $\ln(f(x)) \neq x$.
Mais $\ln(f(0)) = \ln 1 = 0$. Donc la seule solution de l'équation $\ln(f(x)) = x$ est 0 dans l'ensemble $]0,+\infty[\cup \{0\} = [0,+\infty[$. C-à-d dans $[0,+\infty[$.

Rappel : Soit f une fonction numérique continue sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ tel que $f(I) \subset I$
 Et soit $(u_n)_n$ une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 \in I$.
Si la suite $(u_n)_n$ converge vers la limite l , et $l \in I$
Alors $(l) = l$.
On pose $\forall \ x \in [0,+\infty[$; $\varphi(x) = \ln(f(x))$.
φ est continue sur $[0,+\infty[$ car c'est une composition de deux fonctions continues (f et $\ln$). Et $f([0,+\infty[) = [1,+\infty[$.
On a aussi $\varphi([0,+\infty[) = \ln([1,+\infty[) = [0,+\infty[$.
Comme $(u_n)_n$ est convergente vers l alors d'après le rappel, la limite l vérifie $\varphi(l) = l$.
C-à-d : $\ln(f(l)) = l$. d'où $l = 0 = \lim_{n\infty}(u_n)$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

$$On \;\; pose \;\;\; \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} \;\; ; \;\; \forall x > 0$$

ψ *est* une fonction continue sur $]0, +\infty[$ comme étant une composition bien définie de trois fonctions continues.
On remarque que $(\forall x > 0)$; $\psi(x) > 0$.
Donc le signe de l'intégrale $\int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\, dt$ depend de l'ordre entre $\ln 2$ *et* x. Si $x < \ln 2 \implies \int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\, dt < 0$.
Si $x > \ln 2 \implies \int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\, dt > 0$

La Question : 1) b)

Rappel : Si f est continue sur I et $a \epsilon I$.
Alors f admet des primitives sur I . En particulier f admet une primitive φ qui s'annule en 0 et qui vérifie : $\begin{cases} \forall x \epsilon I \;;\; \varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt \;\; et \;\; \varphi(a) = 0 \\ \forall x \epsilon I \;;\; \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$.
On a ψ est continue sur $]0, +\infty[$ et $\ln 2 \;\epsilon\;]0, +\infty[$
Alors ψ admet une primitive F qui s'annule en $\ln 2$
Avec : $\left| \begin{array}{l} \forall x > 0 \;;\; F(x) = \int_{\ln 2}^{x} \psi(t)\, dt \;\; et \;\; F(\ln 2) = 0 \\ \forall x > 0 \;;\; F'(x) = \psi(x) \end{array} \right.$.
Donc F est dérivable sur $]0, +\infty[$.
Et $\forall x > 0 \;;\; F'(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}}$.

La Question : 1) c)

$$\forall x > 0 \;;\; F'(x) = \psi(x) = \frac{1}{\sqrt{e^x - 1}} > 0$$

D'où F est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

La Question : 2) a)

On pose $u = \sqrt{e^x - 1}$. la fonction $u(t)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme composée de deux fonctions continues .

$$u' = \frac{du}{dt} = \frac{e^t}{2\sqrt{e^t - 1}} = \frac{u^2 + 1}{2u}$$

$$\Leftrightarrow \quad dt = \left(\frac{2u}{u^2 + 1} \right) du$$

$$\left| \begin{array}{l} t = ln\, 2 \;\; \Leftrightarrow \;\; u = 1 \\ t = x \;\; \Leftrightarrow \;\; u = \sqrt{e^x - 1} \\ u = \sqrt{e^x - 1} \;\; \Leftrightarrow \;\; \dfrac{1}{\sqrt{e^t - 1}} = \dfrac{1}{u} \end{array} \right.$$

L'intégrale devient alors :

$$\begin{aligned} \int_{\ln 2}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} \right) dt &= \int_1^{\sqrt{e^x - 1}} \left(\frac{1}{u} \right) \cdot \left(\frac{2u}{u^2 + 1} \right) \cdot du \\ &= 2 \int_1^{\sqrt{e^x - 1}} \left(\frac{1}{u^2 + 1} \right) du \\ &= 2[\arctan u]_1^{\sqrt{e^x - 1}} \\ &= 2\left(\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \arctan(1)\right) \\ &= 2\left(\arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{4}\right) \\ &= 2\, arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} F(x) &= \lim_{x \to 0^+} \left(2\, arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \left(2\, arctan\left(\sqrt{e^0 - 1}\right) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= \left(2\, arctan(0) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \times 0 - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{-\pi}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} F(x) &= \lim_{x \to +\infty} \left(2\, arctan\left(\sqrt{e^x - 1}\right) - \frac{\pi}{2} \right) \\ &= 2 \left(\lim_{\substack{t \to +\infty \\ t = \sqrt{e^x - 1}}} \arctan t \right) - \frac{\pi}{2} \\ &= 2\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

La Question : 3) a)

F est une bijection de $]0, +\infty[$ dans $F(]0, +\infty[\,)$ car F est continue et est strictement croissante sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned} F \;:\;]0, +\infty[\;&\longmapsto\; F(]0, +\infty[\,) \\ x \;&\longmapsto\; \int_{\ln 2}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} \right) dt \end{aligned}$$

$$F(\,]0, +\infty[\,) = \left] \lim_{x \to 0^+} F(x) \;;\; \lim_{x \to +\infty} F(x) \right[= \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

$$\begin{aligned} F \;:\;]0, +\infty[\;&\longmapsto\; \left] \frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\\ x \;&\longmapsto\; \int_{\ln 2}^{x} \left(\frac{1}{\sqrt{e^t - 1}} \right) dt \end{aligned}$$

La Question : 3) b)

$$F \ : \ ]0,+\infty[\ \longmapsto \ \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$
$$x \ \longmapsto \ 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}$$

F est une bijection Alors :

$$\left(\forall y \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)(\exists!\, x \in\,]0,+\infty[\,) \ : \ y=f(x)$$

$$\left(soit\ y \in \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\right)(alors\ \exists!\, x \in\,]0,+\infty[\,) \ : \ y=f(x)$$

$$\Leftrightarrow \ y = 2\arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)-\frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow \ \left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = \arctan\left(\sqrt{e^x-1}\right)$$

$$\Leftrightarrow \ \tan\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{4}\right) = e^x-1$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right)+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\cdot\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)} = e^x-1$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)} = e^x-1$$

$$\Leftrightarrow \ \left(\frac{\tan\left(\frac{y}{2}\right)+1}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right)+\left(\frac{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \ \left(\frac{2}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = e^x$$

$$\Leftrightarrow \ \ln\left(\frac{2}{1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)}\right) = \ln(e^x)$$

$$\Leftrightarrow \ \ln(2)-\ln\left(1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right) = x$$

$Remarque : \ il\ est\ trop\ facile\ de\ montrer\ que :$

$$\ln(2)-\ln\left(1-\tan\left(\frac{y}{2}\right)\right) > 0$$

Finalement :

$$F^{-1} \ : \ \left]\frac{-\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[\ \longmapsto \ ]0,+\infty[$$
$$y \ \longmapsto \ \ln 2-\ln\left(1-tan\left(\frac{y}{2}\right)\right)$$

2016 R

Le Premier Exercice

La Question : 1)

$$p(R_U)=\frac{card(R_u)}{card(\Omega)}=\frac{C_4^1}{C_8^1}=\frac{1}{2}$$

$$p(B_U)=\frac{card(B_u)}{card(\Omega)}=\frac{C_4^1}{C_8^1}=\frac{1}{2}$$

La Question : 2) a)

$$p(B_V/R_U)=\frac{C_4^1}{C_7^1}=\frac{4}{7}$$

La Question : 2) b)

$$p(B_V/B_U)=\frac{C_4^1}{C_6^1}=\frac{2}{3}$$

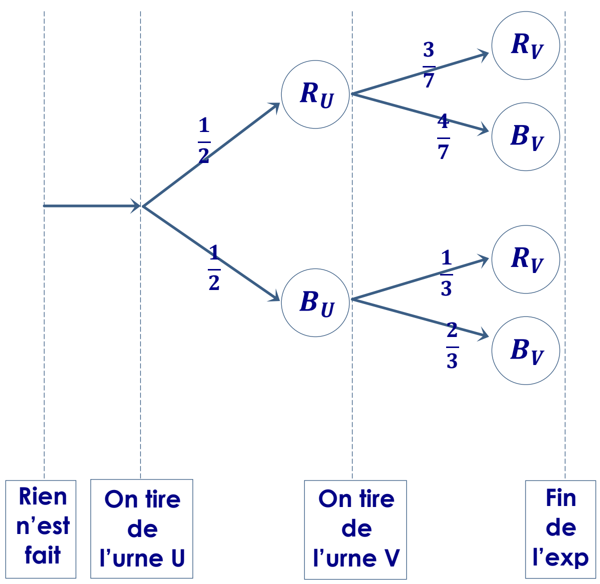
La Question : 3)

$$p(B_V)=p(R_U\cap B_V)+p(B_U\cap B_V)$$
$$=\frac{1}{2}\times\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{13}{21}$$

La Question : 4)

$$p(R_V)=1-p(B_V)=\frac{8}{21}$$
$$=p(R_U)\times p(B_V/R_U)+p(B_U)\times p(B_V/B_U)$$

Résumé :



Le Deuxième Exercice

La Question : 1)

$(E,*)$ est un groupe commutatif car :

- $*$ est une loi de composition interne dans E
- $*$ est associative dans E
- $M(0)$ est l'élément neutre dans E
- Le symétrique de $M(z)$ est $M(-z)$ dans E
- $*$ est commutative dans E

Je vous laisse le soin de vérifier ces assertions.

La Question : 2) a)

Il est très facile de montrer, à l'aide d'un simple calcul matriciel, que :
$\forall\ (z,z')\ \epsilon\ \mathbb{C}^{2*}\ ;\ \ \varphi(z\times z')=\varphi(z)\times\varphi(z')$

La Question : 2) b)

Montrer tout d'abord que φ est bijective :
(l'équation $\varphi(z)=M(a)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$). Et à partir de l'isomorphisme φ,
on écrit : $(\mathbb{C}^*,\times)=(\varphi(\mathbb{C}^*),\times)=(E^*,\times)$.
le groupe $(E^*,\times)$ hérite ses caractéristiques du groupe $(\mathbb{C}^*,\times)$ via l'isomorphisme φ.

La Question : 3)

$(E,*,\times)$ Est un corps commutatif car :

- $(E,*)$ Est un groupe d'élément neutre $M(0)$.
- $(E\backslash\{M(0)\},\times)$ Est un groupe.
- $\times$ Est distributive par rapport à $*$
- $\times$ Est commutative dans E.

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

A l'aide d'un simple calcul, que j'ai fait dans mon brouillon, On montre facilement que :
$\Delta=\left((\sqrt{3}-1)(1-i)\right)^2$ ☺

La Question : 1) b)

$$\begin{cases} z_1=\left[4\,;\dfrac{\pi}{3}\right] \\ z_2=\left[4\,;\dfrac{\pi}{6}\right] \end{cases}$$

La Question : 2) a)

$$(D): z=\frac{1}{2}(1+i\sqrt{3})\bar{z}$$

$$\Leftrightarrow\ (D):\ (x+iy)=\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right)(x-iy)$$

$$\Leftrightarrow\ (D):\ \sqrt{3}y-x=0$$

La Question : 2) b)

Tout d'abord, vous devez montrer que $b^2=2a$ et $\frac{2b}{a}=\bar{b}$ à l'aide d'un simple calcul sur des nombres complexes : $a=1+i\sqrt{3}$ et $b=\sqrt{3}+i$.
En suite :

$$\begin{aligned}\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)}&=\frac{2a}{(a\bar{z}-2b)(z-b)}\\&=\left(\frac{a}{a\bar{z}-2b}\right)\left(\frac{2}{z-b}\right)\\&=\left(\frac{1}{\bar{z}-\bar{b}}\right)\left(\frac{2}{z-b}\right)\\&=\frac{2}{\overline{(z-b)}\cdot(z-b)}\\&=\frac{2}{|z-b|^2}\end{aligned}$$

La Question : 2) c)

$$\frac{b^2}{(z'-b)(z-b)}=\frac{2}{|z-b|^2}\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{b}{z'-b}\right)\left(\frac{b}{z-b}\right)\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ \left(\frac{0-b}{z'-b}\right)\times\left(\frac{0-b}{z-b}\right)\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow\ \arg\left(\left(\frac{0-b}{z'-b}\right)\times\left(\frac{0-b}{z-b}\right)\right)\equiv 0\ [\pi]$$

$$\Rightarrow\ \arg\left(\frac{z_O-z_B}{z_{M'}-z_B}\right)+\arg\left(\frac{z_O-z_B}{z_M-z_B}\right)\equiv 0\ [\pi]$$

$$\Rightarrow\ \arg\left(\frac{z_O-z_B}{z_{M'}-z_B}\right)\equiv\arg\left(\frac{z_M-z_B}{z_O-z_B}\right)\ [\pi]$$

$$\Rightarrow\ \left(\overrightarrow{BM'}\,;\overrightarrow{BO}\right)\equiv\left(\overrightarrow{BO}\,;\overrightarrow{BM}\right)\ [\pi]$$

$$\Rightarrow\ (BO)\ est\ la\ bissectrice\ de\ l'angle\ \left(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{BM'}\right)$$

$$\Rightarrow\ (D)\ est\ la\ bissectrice\ de\ l'angle\ \left(\overrightarrow{BM}\,;\overrightarrow{BM'}\right)$$
$$car\ \ O\ \epsilon\ (D)\ \ et\ \ B\ \epsilon\ (D)$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1) a)

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f_n(x)}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} (\mathcal{C}_n) \textit{ admet une} \\ \textit{branche parabolique} \\ \textit{suivant l'axe des abscisses} \end{matrix}$$

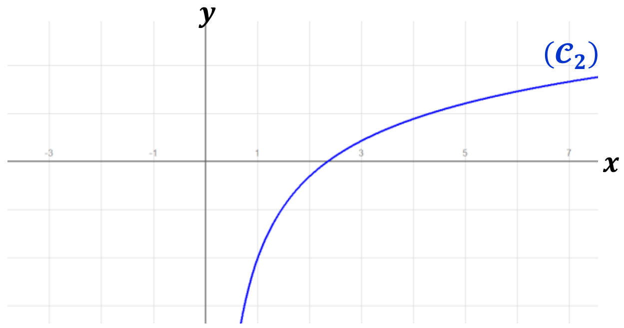
$$\lim_{x\to0^+} f_n(x) = +\infty \Rightarrow \begin{matrix} \textit{l'axe des ordonnées} \\ \textit{est une asymptote} \\ \textit{verticale pour } (\mathcal{C}_n) \end{matrix}$$

La Question : 1) b)

$$\forall\, x > 0 \;;\; f_n'(x) = \frac{1}{x} + \frac{n}{x^2} = \frac{x+n}{x^2} > 0$$

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
$f_n'(x)$	$+$
f_n	$-\infty \nearrow +\infty$

La Question : 1) c)



La Question : 2)

f_n est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
Donc c'est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $f_n(\,]0,+\infty[\,)$
$f_n(\,]0,+\infty[\,) =]-\infty,+\infty[= \mathbb{R}$.

La Question : 3) a)

$$f_n :]0,+\infty[\;\longmapsto\; \mathbb{R} \textit{ est une bijection}$$
$$\Rightarrow (\forall y \epsilon \mathbb{R})(\exists!\, x \,\epsilon\, \mathbb{R}) \;;\; f_n(x) = y$$
$$\Rightarrow (\textit{pour } y = 0 \,\epsilon\, \mathbb{R})(\exists!\, \alpha_n \,\epsilon\,]0,+\infty[\,) \;;\; f_n(\alpha_n) = 0$$
$$\Rightarrow (\forall n \epsilon \mathbb{N}^*)(\exists!\, \alpha_n \,\epsilon\,]0,+\infty[\,) \;;\; f_n(\alpha_n) = 0$$

La Question : 3) b)

$$f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{-1}{x} < 0 \;;\; \forall\, x \,\epsilon\,]0,+\infty[$$
$$\Rightarrow \;\forall\, x > 0 \;;\; f_{n+1}(x) < f_n(x)$$

La Question : 3) c)

$$\begin{aligned} f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) &= 0 - f_{n+1}(\alpha_n) \\ &= -\ln(\alpha_n) + \frac{n+1}{\alpha_n} \\ &= -\ln(\alpha_n) + \frac{n}{\alpha_n} + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= -\left(\ln(\alpha_n) - \frac{n}{\alpha_n}\right) + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= -f_n(\alpha_n) + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= -0 + \frac{1}{\alpha_n} \\ &= \frac{1}{\alpha_n} > 0 \;;\; \textit{car } \;\alpha_n > 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) - f_{n+1}(\alpha_n) > 0 \;;\; \forall n \geq 1$$
$$\Rightarrow f_{n+1}(\alpha_{n+1}) > f_{n+1}(\alpha_n) \;;\; \forall n \geq 1$$
$$\Rightarrow f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(\alpha_{n+1})\big) > f_{n+1}^{-1}\big(f_{n+1}(\alpha_n)\big) \;;\; \forall n \geq 1$$
$$\textit{car } f_{n+1}^{-1} \textit{ est croissante}$$
$$\Rightarrow \alpha_{n+1} > \alpha_n \;;\; \forall n \geq 1$$
$$\Rightarrow (\alpha_n)_{n\geq1} \textit{ est une suite strictement croissante}$$

La Question : 4) a)

On pose $\varphi(x) = \ln x - x$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$	$+$	0	$-$
φ	$-\infty \nearrow$	-1	$\searrow -\infty$

$$\Rightarrow (\forall x > 0) \;;\; \varphi(x) < 0$$
$$\Rightarrow (\forall x > 0) \;;\; \ln x < x$$

La Question : 4) b)

$$\begin{aligned} \alpha_n > 0 \;&\Rightarrow \ln(\alpha_n) < \alpha_n \;;\; \textit{selon } 4)a) \\ &\Rightarrow \ln(\alpha_n) - \frac{n}{\alpha_n} < \alpha_n - \frac{n}{\alpha_n} \\ &\Rightarrow f_n(\alpha_n) < \frac{\alpha_n^2 - n}{\alpha_n} \\ &\Rightarrow 0 < \frac{\alpha_n^2 - n}{\alpha_n} \\ &\Rightarrow \alpha_n^2 - n > 0 \;;\; \textit{car } \;\alpha_n > 0 \\ &\Rightarrow |\alpha_n| > \sqrt{n} \;;\; \textit{avec } \;|\alpha_n| = \alpha_n > 0 \\ &\Rightarrow \alpha_n > \underbrace{\sqrt{n}}_{\substack{n\infty \\ \searrow \\ +\infty}} \;\Rightarrow\; \lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty \end{aligned}$$

La Question : 5) a)

Utiliser le théorème de la médiane :

$$On\ a\ :\ \left| \begin{array}{l} f_n\ est\ continue\ sur\ [\alpha_n ,\alpha_{n+1}] \subset]0,+\infty[\\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)\ ;\ \alpha_n < \alpha_{n+1} \end{array} \right.$$

$$Alors\ :\ \left| \begin{array}{l} \exists\ c_n\ \epsilon\ [\alpha_n ,\alpha_{n+1}] \\ \int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)dx = (\alpha_{n+1}-\alpha_n)f_n(c_n) \end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow\ \exists\ c_n\ \epsilon\ [\alpha_n ,\alpha_{n+1}]\ ;\ \frac{1}{\alpha_{n+1}-\alpha_n}\int_{\alpha_n}^{\alpha_{n+1}} f_n(x)\,dx = f_n(c_n)$$

$$\Longrightarrow\ (\forall n\epsilon\mathbb{N}^*)(\exists\ c_n\ \epsilon\ [\alpha_n ,\alpha_{n+1}])\ ;\ I_n = f_n(c_n)$$

La Question : 5) b)

$$c_n\ \epsilon\ [\alpha_n ,\alpha_{n+1}]\ \Longrightarrow\ \alpha_n \le c_n \le \alpha_{n+1}$$

$$\Longrightarrow\ f_n(\alpha_n) \le f_n(c_n) \le f_n(\alpha_{n+1})\ ;\ f_n \nearrow$$

$$\Longrightarrow\ 0 \le I_n \le \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \le I_n \le \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n}{\alpha_{n+1}} - \frac{1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \le I_n \le \ln(\alpha_{n+1}) - \frac{n+1}{\alpha_{n+1}} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \le I_n \le f_{n+1}(\alpha_{n+1}) + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ 0 \le I_n \le 0 + \frac{1}{\alpha_{n+1}}$$

$$\Longrightarrow\ \boxed{0 \le I_n \le \frac{1}{\alpha_{n+1}}}\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N}^*$$

La Question : 5) c)

$$\lim_{n\infty}(\alpha_n) = \lim_{n\infty}(\alpha_{n+1}) = +\infty\ \Longrightarrow\ \underbrace{0}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0} \le I_n \le \underbrace{\left(\frac{1}{\alpha_{n+1}}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 0}$$

$$\Longrightarrow\ \lim_{n\infty}(I_n) = 0$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1) a)

$x \longmapsto \frac{1}{\ln x}$ est continue sur $[n,+\infty[\subseteq [2,+\infty[$

$\Longrightarrow\ x \longmapsto \frac{1}{\ln x}$ admet des primitives sur $[n,+\infty[$.
En particulier $g_n(x)$

$$\Longrightarrow\ g_n'(x) = \frac{1}{\ln x}\ ;\ \forall x \ge n$$

La Question : 1) b)

$$g_n'(x) = \frac{1}{\ln x} > 0\ ;\ \forall x \ge n$$

$\Longrightarrow\ g_n$ est croissante tout au long de $[n,+\infty[$

La Question : 2) a)

On pose $u = t-1\ \Longleftrightarrow\ \left| \begin{array}{l} du = dt \\ t = u-1 \\ t = n\ \Leftrightarrow\ u = n-1 \\ t = x\ \Leftrightarrow\ u = x-1 \end{array} \right.$

$$\forall\ u \ge 0\ ;\ \ln(1+u) \le u$$

$$\Longrightarrow\ \frac{1}{\ln(1+u)} \ge \frac{1}{u}$$

$$\Longrightarrow\ \int_{n-1}^{x-1}\left(\frac{1}{\ln(1+u)}\right)du \ge \int_{n-1}^{x-1}\left(\frac{1}{u}\right)du$$

$$\Longrightarrow\ g_n(x) \ge \ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)$$

La Question : 2) b)

$$g_n(x) \ge \underbrace{\ln\left(\frac{x-1}{n-1}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty}\ \Longrightarrow\ \lim_{x\to+\infty} g_n(x) = +\infty$$

La Question : 3) a)

g_n est continue et strictement croissante sur $[n,+\infty[$
$\Longrightarrow\ g_n$ est une bijection de $[n,+\infty[$
dans $g_n([n,+\infty[) = [0,+\infty[$

La Question : 3) b)

$$g_n\ :\ [n,+\infty[\ \longmapsto\ [0,+\infty[\ est\ une\ bijection$$

$$\Longleftrightarrow\ (\forall\ y\ \epsilon\ [0,+\infty[)(\exists!\ x\ \epsilon\ [n,+\infty[)\ ;\ g_n(x) = y$$

$$\Longrightarrow\ (pour\ y = 1)(\exists!\ u_n\ \epsilon\ [n,+\infty[)\ ;\ g_n(u_n) = 1$$

$$\Longrightarrow\ (\forall n \ge 2)(\exists!\ u_n \ge n)\ ;\ \int_n^{u_n}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt = 1$$

La Question : 4) a)

$$\int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt = \int_{u_n}^{n}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt + \int_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt + \int_{n+1}^{u_{n+1}}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt$$

$$= -1 + \int_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt + 1$$

$$= \int_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt$$

La Question : 4) b)

$$signe\left(\int_{u_n}^{u_{n+1}}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt\right) \equiv signe\left(\int_{n}^{n+1}\left(\frac{1}{\ln t}\right)dt\right)$$

$$signe(u_{n+1}-u_n) \equiv signe(n+1-n) \;\; ; \;\; car \;\left(\frac{1}{\ln t}\right) > 0$$

$$\Longrightarrow \; signe(u_{n+1}-u_n) \equiv signe(1) \equiv \boxed{+}$$

$$\Longrightarrow \; u_{n+1}-u_n > 0 \;\; ; \;\; \forall n \geq 2$$

$$\Longrightarrow \; u_{n+1} > u_n \;\; ; \;\; \forall n \geq 2$$

$$\Longrightarrow \; (u_n)_{n\geq 2} \;\; est \;\; une \;\; suite \;\; strictement \; croissante.$$

La Question : 4) c)

$$u_n \geq \underbrace{n}_{\xrightarrow{n\infty} +\infty} \;\; \Longrightarrow \;\; \lim_{n\infty}(u_n) = +\infty$$

2017 N

Le Premier Exercice

La Question : 1)

E est une partie non vide de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 qui s'écrivent sous la forme $M(a,b)$ définie dans l'énoncé. La matrice $\mathcal{O}$ est un élément de E car $\mathcal{O} = M(0,0)$ et $(0,0) \in \mathbb{R}^2$.
soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux éléments de E ,

$$M(a,b) - M(c,d) = \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a-c & b-d & -(b-d) \\ 0 & 0 & 0 \\ (b-d) & -(a-c) & (a-c) \end{pmatrix}$$

$$= M(a-c \;;\; b-d) \in E \;\; car \;\; \begin{pmatrix} a-c \\ b-d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

Alors d'après la caractérisation des sous-groupes on en déduit que $(E,+)$ est bien un sous groupe de $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),+)$.

La Question : 2)

Soient $M(a,b)$ et $M(c,d)$ deux matrices de E,

$$M(a,b) \top M(c,d) = M(a,b) \times A \times M(c,d)$$

$$= \begin{pmatrix} a & b & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & -a & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a & 0 & -b \\ 0 & 0 & 0 \\ b & 0 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & d & -d \\ 0 & 0 & 0 \\ d & -c & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (ac-bd) & (ad+bc) & -(ad+bc) \\ 0 & 0 & 0 \\ (ad+bc) & -(ac-bd) & (ac-bd) \end{pmatrix}$$

$$= M(ac-bd \;;\; ad+bc) \in E \quad (*)$$

$$car \;\; (ac-bd) \in \mathbb{R} \;\; et \;\; (ad+bc) \in \mathbb{R}$$

Ainsi $\top$ est une loi de composition interne dans E.
C'est-à-dire que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\top)$

La Question : 3) a)

$$\begin{aligned} \varphi \;:\; (\mathbb{C}^*,\times) &\longmapsto (E^*,\top) \\ a+ib &\longmapsto M(a,b) \end{aligned}$$

Soient $(a+ib)$ et $(c+id)$ deux nombres complexes non-nuls :

$$\begin{aligned} \varphi\big((a+ib)\times(c+id)\big) &= \varphi\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big) \\ &= M(ac-bd \;;\; ad+bc) \\ &= M(a,b) \top M(c,d) \;\; ; \;\; selon \; (*) \end{aligned}$$

Ainsi φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ dans $(E^*,\top)$
En plus ; φ est une bijection car l'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$ et c'est $(a+ib)$ avec $M(a,b)$ est un élément donné dans E^* . En d'autres termes :
$(\forall\, M(a,b) \in E)\; (\exists!\, x+iy \in \mathbb{C}^*) \;:\; \varphi(x+iy) = M(a,b)$.
Donc la bijectivité de φ nous assure l'écriture :
$\varphi(\mathbb{C}^*) = E^*$.

La Question : 3) b)

Comme φ est un homomorphisme et comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe ; alors $(\varphi(\mathbb{C}^*),\top)$ est un groupe aussi.
C'est-à-dire que $(E^*,\top)$ est un groupe.
$(1+0i)$ est l'élément neutre dans $(\mathbb{C}^*,\times)$
alors $M(1,0)$ sera l'élément neutre dans $(E^*,\top)$
Remarque 1) : l'homomorphisme des groupes conserve la structure algébrique des groupes.
Remarque 2) : φ est définie de $\mathbb{C}^*$ dans E^* mais pas dans E parce que l'élément $\mathcal{O} = M(0,0)$ n'est pas inversible dans $(E,\top)$.

$$\left| \begin{aligned} M(0,0) \top M(x,y) = M(0,0) \neq M(1,0) \\ M(x,y) \top M(0,0) = M(0,0) \neq M(1,0) \end{aligned} \right.$$

La Question : 4) a)

Soient $M(a,b), M(c,d)$ et $M(e,f)$ trois éléments de E

$$M(a,b) \top \big(M(c,d)+M(e,f)\big) = M(a,b) \top M(c+e\,;d+f)$$
$$= M\big(a(c+e)-b(d+f)\ ;\ a(d+f)+b(c+e)\big)$$
$$= M(ac+ae-bd-bf\ ;\ ad+af+bc+be)$$
$$Or\ :\ M(a,b) \top M(c,d) + M(a,b) \top M(e,f)$$
$$= M(ac-bd\ ;\ ad+bc) + M(ae-bf\ ;\ af+be)$$
$$= M(ac-bd+ae-bf\ ;\ ad+bc+af+be)$$

Donc $\top$ est distributive par rapport à + à gauche.
La distributivité à droite est déduite via la commutativité de $\top$ dans E.
Finalement : $\top$ est distributive par rapport à + .

La Question : 4) b)

D'après les résultats trouvés ci-dessus, on écrit :

$$\left|\begin{array}{l} (E,+)\ est\ 1\ groupe\ commutatif\ d'élément\ neutre\ M(0,0) \\ (E\backslash\{M(0,0)\}\,;\top)\ est\ un\ groupe \\ \top\ est\ distributive\ par\ rapport\ à\ + \end{array}\right.$$

Donc d'après la caractérisation des corps on en déduit que $(E,+,\top)$ est un corps. De plus $\top$ est commutative dans $\top$. Alors $(E,+,\top)$ est un corps commutatif .

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\Delta = 4(m+1+i)^2 - 8(m^2+m(1+i)+i)$$
$$= 4(m^2+2m(1+i)+(1+i)^2) - 8(m^2+m(1+i)+i)$$
$$= 4m^2+8m(1+i)+4(2i)-8m^2-8m(1+i)-8i$$
$$= -4m^2$$
$$= (2im)^2$$

La Question : I) 2)

$$z_1 = \frac{2(m+1+i)+2im}{4} = \frac{(m+1)(i+1)}{2}$$
$$z_2 = \frac{2(m+1+i)-2im}{4} = \frac{(m+i)(1-i)}{2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$i\,z_2+1 = \frac{i(m+i)(1-i)}{2}+\frac{2}{2} = \frac{i(m-mi+i+1)+2}{2}$$
$$= \frac{im+m-1+i+2}{2} = \frac{im+m+1+i}{2}$$
$$= \frac{(m+1)(i+1)}{2} = z_1$$

La Question : II) 1) b)

$$On\ a\ :\ \frac{z_{M_1}-\omega}{z_{M_2}-\omega} = \frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}$$
$$= \left(\frac{\frac{(1+i)(m+1)}{2}-\frac{(1+i)}{2}}{\frac{(1-i)(m+i)}{2}-\frac{(1+i)}{2}}\right)$$
$$= \frac{(1+i)(m+1)-(1+i)}{(1-i)(m+i)-(1+i)}$$
$$= \frac{(1+i)(m+1)-(1+i)}{(1-i)(m+i)-i(1-i)}$$
$$= \frac{(1+i)(m)}{(1-i)(m)}$$
$$= \frac{1+i}{1-i}$$
$$= \frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}$$
$$= \frac{2i}{2} = i$$
$$= e^{\frac{i\pi}{2}}$$

Ainsi : $\frac{z_{M_1}-\omega}{z_{M_2}-\omega} = e^{\frac{i\pi}{2}}$.

c'est-à-dire : $(z_{M_1}-\omega) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_{M_2}-\omega)$.
c-à-d que M_1 est l'image de M_2 via la rotation R de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$. ie :

$$R_{\frac{\pi}{2}}(\Omega)\ :\ (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$$
$$M_2(z_2) \longmapsto M_1(z_1)$$

La Question : II) 2) a)

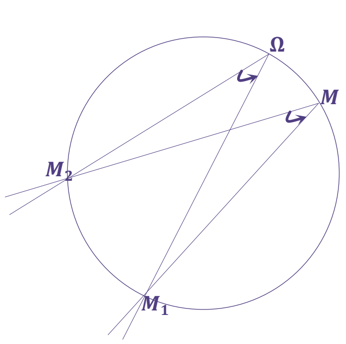
$$On\ a\ :\ \frac{z_{M_2}-m}{z_{M_1}-m} = \frac{z_2-m}{z_1-m}$$
$$= \left(\frac{\frac{(1-i)(m+i)}{2}-\frac{2m}{2}}{\frac{(1+i)(m+1)}{2}-\frac{2m}{2}}\right)$$
$$= \frac{(1-i)(m+i)-2m}{(1+i)(m+1)-2m}$$
$$= \frac{m+i-im+1-2m}{m+1+im+i-2m}$$
$$= \frac{-m-im+1+i}{im-m+1+i}$$
$$= \frac{-m(1+i)+1(1+i)}{m(i-1)-i(i-1)}$$
$$= \frac{(1+i)(-m+1)}{(i-1)(m-i)}$$
$$= \left(\frac{-1-i}{i-1}\right)\left(\frac{m-1}{m-i}\right) = i\left(\frac{m-1}{m-i}\right)$$

La Question : II) 2) b)

On part du fait que les points M, M_1 *et* M_2 sont colinéaires

$$\Longrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R}\ ;\ \overrightarrow{MM_2} = k \cdot \overrightarrow{MM_1}$$
$$\Longrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R}\ ;\ \left(z_{M_2} - z_M\right) = k \cdot \left(z_{M_1} - z_M\right)$$
$$\Longrightarrow \quad \exists\, k \in \mathbb{R}\ ;\ \left(\frac{z_{M_2} - z_M}{z_{M_1} - z_M}\right) = k \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(\frac{z_2 - m}{z_1 - m}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(i\left(\frac{m-1}{m-i}\right)\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(i\left(\frac{x+iy-1}{x+iy-i}\right)\right) = 0\ ;\ m = x + iy$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(\frac{ix-y-i}{x+i(y-1)}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(\frac{(ix-y-i)(x-iy-i)}{x^2+(y-1)^2}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \mathcal{Im}\left(\frac{ix^2+xy-x-xy+iy^2-iy-ix-y+1}{x^2+(y-1)^2}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad x^2+y^2-y-x = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \left(x^2-x+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4}+\left(y^2-y+\frac{1}{4}\right)-\frac{1}{4} = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$$
$$\Longrightarrow \quad |MI|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\ ;\ avec\ I\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$$
$$\Longrightarrow \quad |MI|^2 = \left(\frac{AB}{2}\right)^2\ ;\ avec\ I = milieu[AB]$$

La Question : II) 2) c)



Les 4 points sont circulaires si : premièrement M n'appartient pas au cercle (Γ) et deuxièmement si $\left(\widehat{\overrightarrow{\Omega M_2}, \overrightarrow{\Omega M_1}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{MM_2}, \overrightarrow{MM_1}}\right)\ [\pi]$.

$$\Longrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_{M_1}-z_\Omega}{z_{M_2}-z_\Omega}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{M_1}-z_M}{z_{M_2}-z_M}\right)[\pi]$$
$$\Longrightarrow \quad \arg\left(\frac{z_{M_1}-z_\Omega}{z_{M_2}-z_\Omega}\right) - \arg\left(\frac{z_{M_1}-z_M}{z_{M_2}-z_M}\right) \equiv 0\ [\pi]$$
$$\Longrightarrow \quad \arg\left[\left(\frac{z_{M_1}-z_\Omega}{z_{M_2}-z_\Omega}\right) : \left(\frac{z_{M_1}-z_M}{z_{M_2}-z_M}\right)\right] \equiv 0\ [\pi]$$
$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{z_1-\omega}{z_2-\omega}\right) : \left(\frac{z_1-m}{z_2-m}\right) \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \quad (i) : \left(\frac{i(m-1)}{m-i}\right) \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \quad \left(\frac{m-i}{m-1}\right) \in \mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{m-i}{m-1}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{x+iy-i}{x+iy-1}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad \mathfrak{Im}\left(\frac{(x+iy-i)(x-iy-1)}{(x-1)^2+y^2}\right) = 0$$
$$\mathfrak{Im}\left(\frac{x^2-x-ixy+ixy-iy+y^2-ix+i-y}{(x-1)^2+y^2}\right) = 0$$
$$\Longrightarrow \quad -y-x+1 = 0$$
$$\Longrightarrow \quad x+y = 1$$
$$\Longrightarrow \quad M \in (\Delta) : x+y = 1$$

Cherchons maintenant les points d'intersection entre (Γ) et (Δ) en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} x+y = 1 \\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(-x+1-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad 2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\Longleftrightarrow \quad \left(x-\frac{1}{2}\right) = \pm\frac{1}{2}$$
$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} ou\ bien\ \ x = 0\ \Longrightarrow y = 1 \\ ou\ bien\ \ x = 1\ \Longrightarrow y = 0 \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \quad (\Delta) \cap (\Gamma) = \{\,(0,1)\ ;\ (1,0)\,\}$$

Finalement : l'ensemble $\tilde{E}$ des points M pour que Ω, M, M_1 *et* M_2 soient circulaires est la droite $(\Delta) : x+y = 1$ privée des points $(1{,}0)$ et $(0{,}1)$.
Autrement-dit : $\tilde{E} = (\Delta)\backslash\{(0,1)\ ;\ (1,0)\} = (\Delta)\backslash\{B ; A\}$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

On considère dans $\mathbb{N}^{2*}$ l'équation suivante :

$\boxed{px + y^{p-1} = 2017}$. soit (x, y) une solution.

On a : $px + y^{p-1} - p = p(x-1) + y^{p-1}$.

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \mathbb{N}^{2*} &\Longrightarrow x \geq 1 \quad et \quad y > 0 \\
&\Longrightarrow (x-1) \geq 0 \quad et \quad y > 0 \\
&\Longrightarrow p(x-1) \geq 0 \quad et \quad y^{p-1} > 0 \ \ car\ p \geq 5 \\
&\Longrightarrow p(x-1) + y^{p-1} > 0 \\
&\Longrightarrow px + y^{p-1} - p > 0 \\
&\Longrightarrow px + y^{p-1} > p \\
&\Longrightarrow 2017 > p
\end{aligned}$$

La Question : 1) b)

Par l'absurde, on suppose que p divise y.

Alors : $(\exists k \epsilon \mathbb{N}^*)$; $y = kp$

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow px + (kp)^{p-1} = 2017 \\
&\Longrightarrow px + k^{p-1}p^{p-1} = 2017 \\
&\Longrightarrow px + (k^{p-1}p^{p-2}p) = 2017 \\
&\Longrightarrow p(x + k^{p-1}p^{p-2}) = 2017 \\
&\Longrightarrow p/2017\,; \ avec \begin{cases} p \in \mathbb{P} \\ 5 \leq p < 2017 \end{cases} \\
&\Longrightarrow p/2017\,; \ avec \begin{cases} p \neq 1 \\ p \neq 2017 \end{cases} \\
&\Longrightarrow absurde \\
&\Longrightarrow p \ \ ne\ divise\ pas\ \ y
\end{aligned}$$

Remarque : on peut aisément montrer que $(x + k^{p-1}p^{p-2}) \in \mathbb{N}^*$ car $x > 0$ et $k > 0$ et $p \geq 5$.

La Question : 1) c)

C'est le moment idéal pour faire appel au petit théorème de Fermat.

Rappel : $\left| \begin{matrix} p \in \mathbb{P}^+ \\ p \wedge a = 1 \end{matrix} \right. \Longrightarrow a^{p-1} \equiv 1[p]$.

On a : $p \wedge y = 1$, car p ne divise pas y donc $y \neq p$.
Donc d'après le petit théorème de Fermat , on écrit : $y^{p-1} \equiv 1[p]$. Si $y = 1$ alors ça marche aussi.
On a $px + y^{p-1} = 2017$
c-à-d : $px + (y^{p-1} - 1) = 2016$.

comme $\left| \begin{matrix} p/px \\ p/(y^{p-1}-1) \end{matrix} \right.$ alors $p/(px + y^{p-1} - 1)$

D'où : $p/2016$

La Question : 1) d)

$$\begin{aligned}
p/2016 &\Longrightarrow p/(2^5 \times 3^2 \times 7) \\
&\Longrightarrow p \in \{2\,;3\,;7\} \\
&\Longrightarrow p \in \{7\} \ ; \ car\ p \geq 5 \\
&\Longrightarrow p = 7
\end{aligned}$$

La Question : 2)

On a d'après les résultats de la question 1) :
si (x, y) est solution de $px + y^{p-1} = 2017$, alors p=7.
Donc il est clair que si $p \neq 7$ alors l'équation n'admet pas de solutions dans $\mathbb{N}^{2*}$.
L'équation devient : $7x + y^6 = 2017$; $(x, y) \in \mathbb{N}^{2*}$

$$\begin{aligned}
(x,y) \in \mathbb{N}^{2*} &\Longrightarrow x > 0 \quad et \quad y > 0 \\
&\Longrightarrow 7x > 0 \quad et \quad y > 0 \\
&\Longrightarrow 0 < 2017 - 7x < 2017 \\
&\Longrightarrow 0 < y^6 < 2017 \\
&\Longrightarrow 0 < y < 2017^{\frac{1}{6}} \\
&\Longrightarrow 0 < y < 3{,}55 \\
&\Longrightarrow y \in \{1\,;2\,;3\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y = 1 &\Longrightarrow 7x + 1 = 2017 \\
&\Longrightarrow x = \frac{2016}{7} = \boxed{288}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y = 2 &\Longrightarrow 7x + 2^6 = 2017 \\
&\Longrightarrow x = \frac{2017 - 2^6}{7} = \boxed{279}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
y = 3 &\Longrightarrow 7x + 3^6 = 2017 \\
&\Longrightarrow x = \frac{2017 - 3^6}{7} = \boxed{184}
\end{aligned}$$

Inversement : On vérifie aisément que les couples (288,1) , (279,2) et (184,3) vérifient-bien l'équation $7x + y^6 = 2017$. Finalement : l'ensemble des solutions de cet équation est défini explicitement par : $\mathcal{S} = \{(288{,}1)\,; (279{,}2)\,; (184{,}3)\}$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{\substack{t\to-\infty\\ t=\frac{-1}{x}}}(1-t)e^{t}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(e^{t}-te^{t}\right)$$

$$= 0^+ - 0^- = 0$$

$$= f(0)$$

Ainsi : f est continue en 0 à droite

La Question : I) 1) b)

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$$

$$= \lim_{\substack{t\to-\infty\\ t=\frac{-1}{x}}} -t(1-t)e^{t}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(-te^{t}+t^{2}e^{t}\right)$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(-te^{t}\right) + \lim_{t\to-\infty} 4\left(\frac{t}{2}e^{\frac{t}{2}}\right)^{2}$$

$$= \lim_{t\to-\infty}\left(-te^{t}\right) + 4\lim_{\substack{\mu\to-\infty\\ \mu=\frac{t}{2}}}\left(\mu e^{\mu}\right)^{2}$$

$$= -0^- + 4(0^-)^2 = 0 \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

Donc f est dérivable à droite en 0 et $f_d'(0) = 0$

La Question : I) 1) c)

Comme $x \longmapsto \frac{1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$,
alors $x \longmapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)$ est aussi dérivable sur $]0,+\infty[$.
comme $x \longmapsto \frac{-1}{x}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $x \longmapsto e^{x}$
et aussi dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0$; $e^{\frac{-1}{x}}>0$
Alors $x \longmapsto e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivables sur $]0,+\infty[$.
comme $x \longmapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$,
et comme $x \longmapsto e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ alors le produit est dérivable aussi sur $]0,+\infty[$.
ainsi $x \longmapsto \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
soit $x \,\epsilon\,]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(1+\frac{1}{x}\right)' e^{\frac{-1}{x}} + \left(e^{\frac{-1}{x}}\right)'\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} + \left(\frac{-1}{x}\right)' e^{\frac{-1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{-1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}\left(1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^2}e^{\frac{-1}{x}}\left(-1+1+\frac{1}{x}\right)$$

$$= \frac{1}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}$$

La Question : I) 2) a)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)e^{\frac{-1}{x}}$$

$$= \lim_{\substack{t\to 0^+\\ t=\frac{1}{x}}}(1+t)e^{-t}$$

$$= (1+0)e^{0} = 1$$

La droite d'équation $y=1$ est une asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$.

La Question : I) 2) b)

Comme $f'(x) = \frac{1}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}$ alors $\forall x>0$; $f'(x)>0$
donc f est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
f	0 ↗	1

La Question : I) 3) a)

$$f''(x) = \left(\frac{1}{x^3}e^{\frac{-1}{x}}\right)' = \left(\frac{-3x^2}{x^6}\right)e^{\frac{-1}{x}} + \left(\frac{1}{x^2}\right)e^{\frac{-1}{x}}\cdot\left(\frac{1}{x^3}\right)$$

$$= \left(\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right)e^{\frac{-1}{x}}$$

$$f''(x) = 0 \iff \left(\frac{-3}{x^4}+\frac{1}{x^5}\right) = 0 \;;\; car\ e^{\frac{-1}{x}} > 0$$

$$\iff -3x^5 + x^4 = 0$$

$$\iff x^4(1-3x) = 0$$

$$\iff \begin{cases} oubien\ x = 0 \\ oubien\ (1-3x) = 0 \end{cases}$$

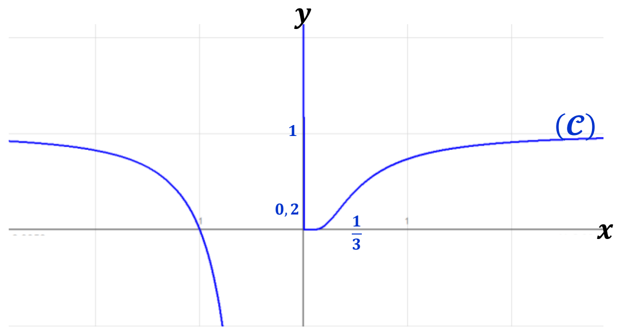
$$\iff (1-3x) = 0 \;;\; car\ x > 0$$

$$\iff (1-3x) = 0 \;;\; car\ x > 0$$

$$\iff x = \frac{1}{3}$$

Donc le point $\left(\frac{1}{3}\,;0{,}2\right)$ est un point d'inflexion pour la courbe $(\mathcal{C})$.

La Question : I) 3) b)



La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Rappel : Si f est continue sur I et $a \in I$.
alors f admet des primitives sur l'intervalle I.
En particulier f admet une primitive φ qui s'annule en a telle que :

$$\left| \begin{array}{l} \forall x \in I \;;\; \varphi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \;;\; \varphi(a) = 0 \\ \forall x \in I \;;\; \varphi'(x) = f(x) \end{array} \right.$$

Dans cet exercice, f est continue sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et $1 \in]0,+\infty[$. Alors f admet une primitive φ telle que $\left| \begin{array}{l} \forall x \in]0,+\infty[\;;\; \varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt = -F(x) \\ \varphi(1) = 0 \end{array} \right.$
et φ est dérivable sur $]0,+\infty[$; $\varphi'(x) = f(x)$.
Donc F est continue sur $]0,+\infty[$.

La Question : II) 2) a)

$$\begin{aligned} \int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt &= \int_x^1 \Big(\underbrace{1}_{u'(t)}\Big) \cdot \Big(\underbrace{e^{\frac{-1}{t}}}_{v(t)}\Big)\, dt \\ &= \left[t \cdot e^{\frac{-1}{t}}\right]_x^1 - \int_x^1 t \cdot \left(\frac{-1}{t}\right)' \cdot e^{\frac{-1}{t}}\, dt \\ &= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(t \cdot \frac{1}{t^2} \cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt \\ &= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t} \cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt \end{aligned}$$

La Question : II) 2) b)

$$\begin{aligned} \int_x^1 \left(1 + \frac{1}{t}\right) e^{\frac{-1}{t}} dt &= \int_x^1 \left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt + \int_x^1 \frac{1}{t}\left(e^{\frac{-1}{t}}\right) dt \\ &= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} - \int_x^1 \left(\frac{1}{t} \cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt + \int_x^1 \left(\frac{1}{t} \cdot e^{\frac{-1}{t}}\right) dt \\ &= e^{-1} - x\,e^{\frac{-1}{x}} \quad ; \quad x > 0 \end{aligned}$$

La Question : II) 2) c)

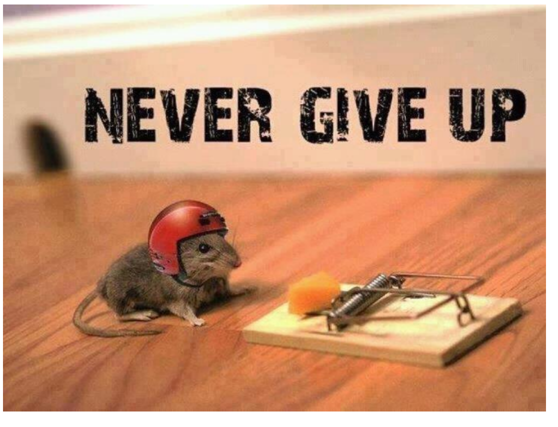
il suffit de remarquer que :

$$\begin{aligned} \left(x\,e^{\frac{-1}{x}}\right)' &= 1 \cdot e^{\frac{-1}{x}} + \left(e^{\frac{-1}{x}}\right)' \cdot x = e^{\frac{-1}{x}} + \frac{1}{x^2} \cdot x \cdot e^{\frac{-1}{x}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Donc \;:\; \int_0^1 f(x)\,dx &= \int_0^1 \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}}\, dx \\ &= \int_0^1 \left(x\,e^{\frac{-1}{x}}\right)' dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x^2}{x+1}\, f(x)\right)' dx \\ &= \left[\frac{x^2}{x+1}\, f(x)\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{1^2}{1+1}\, f(1)\right) - \left(\frac{0^2}{0+1}\, f(0)\right) \\ &= \frac{1}{2} f(1) \\ &= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{1}\right) e^{\frac{-1}{1}} = e^{-1} \end{aligned}$$

La Question : II) 3)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \int_0^2 |f(t)|\,dt = \int_0^2 f(t)\,dt \\ &= \int_0^1 f(t)\,dt - \int_2^1 f(t)\,dt \\ &= e^{-1} - \left(e^{-1} - 2\,e^{\frac{-1}{2}}\right) \\ &= \left(2\,e^{\frac{-1}{2}}\right) \|\vec{\imath}\| \times \|\vec{\jmath}\| \\ &= \left(2\,e^{\frac{-1}{2}}\right) (2\,cm) \times (2\,cm) \\ &= \left(8\,e^{\frac{-1}{2}}\right) cm^2 \end{aligned}$$



La Question : II) 4) a)

La fonction f est une fonction continue sur $]0,+\infty[$ et $1 \in]0,+\infty[$. Alors f admet une primitive φ qui s'annule en 1 définie comme suit :

$$\begin{cases} \varphi(x) = \int_1^x f(t)\,dt = -F(x) \\ \varphi(1) = 0 \\ \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

. Alors pour tout n dans $\mathbb{N}^*$

on obtient : $\begin{cases} \varphi \ est \ continue \ sur \ [n\,,n+2] \\ \varphi \ est \ dérivable \ sur \ ]n\,,n+2[\end{cases}$.

Ainsi d'après le théorème des accroissements finis appliqué à φ sur $[n\,,n+2]$ on écrit :

$\forall n \geq 0 \ ; \ \exists v_n \in]n\,,n+2[\ ; \ \frac{\varphi(n+2)-\varphi(n)}{(n+2)-n} = \varphi'(v_n)$

c-à-d : $F(n) - F(n+2) = 2f(v_n)$.

c-à-d : $u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}}$.

Finalement :

$\forall n \geq 0 \ ; \ \exists v_n \in]n\,,n+2[\ ; \ u_n = 2\left(1+\frac{1}{v_n}\right)e^{\frac{-1}{v_n}}$.

La Question : II) 4) b)

On a prouvé, dans la première partie , la croissance de la fonction f sur $]0,+\infty[$. soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\Rightarrow \ \exists\, v_n \in]n\,,n+2[\ ; \ u_n = f(v_n)$$

$$n < v_n < n+2 \ \Rightarrow \ f(n) < f(v_n) < f(n+2) \ car\ f \nearrow$$

$$\Rightarrow \ 2f(n) < 2f(v_n) < 2f(n+2)$$

$$\Rightarrow \ 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}} < u_n < 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}}$$

La Question : II) 4) c)

$$\begin{cases} \lim\limits_{n\infty} 2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}} = 2(1+0)e^{-0} = 2 \\ \lim\limits_{n\infty} 2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}} = 2(1+0)e^{-0} = 2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \ \underbrace{2\left(1+\frac{1}{n}\right)e^{\frac{-1}{n}}}_{n\infty \ \to\ 2} < u_n < \underbrace{2\left(1+\frac{1}{n+2}\right)e^{\frac{-1}{n+2}}}_{n\infty \ \to\ 2}$$

$$Finalement \ : \ \lim_{n\infty}(u_n) = 2$$

La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

Soit ψ la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}^*$ à valeurs dans $\mathbb{R}^+$ par : $\psi(x) = e^{\frac{-1}{x}}$. il est clair que ψ est continue et strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$$car \ x > y \ \Rightarrow \ \frac{1}{x} < \frac{1}{y}$$

$$\Rightarrow \ \frac{-1}{x} > \frac{-1}{y}$$

$$\Rightarrow \ e^{\frac{-1}{x}} > e^{\frac{-1}{y}}$$

$$\Rightarrow \ \psi(x) > \psi(y)$$

Donc ψ est une bijection de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $\psi(]0,+\infty[)$.

$$\psi(]0,+\infty[) = \left]\lim_{x\to0^+}\psi(x) \ ; \ \lim_{x\to+\infty}\psi(x)\right[=]0,1[$$

Donc ψ est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]0,1[$.

$$\psi \ : \ ]0,+\infty[\ \longmapsto \ ]0,1[\qquad x \ \longmapsto \ \psi(x)$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall\, y \in]0,1[),(\exists!\, x \in]0,+\infty[) \ : \ \psi(x) = y$$

$$ou \ \ (\forall\, x \in]0,+\infty[),(\exists!\ y \in]0,1[) \ : \ \psi(x) = y$$

$$joliment \ \ (\forall n \in \mathbb{N}^*),(\exists!\ \beta_n \in]0,1[) \ : \ \psi(n) = \beta_n$$

$$\Leftrightarrow \ (\forall n \in \mathbb{N}^*),(\exists!\ \beta_n \in]0,1[) \ : \ e^{\frac{-1}{n}} = \beta_n \quad (*)$$

La fonction f est aussi une bijection de $]0,+\infty[$ à valeurs dans $]0,1[$ car elle est continue et elle est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.

$$f \ : \ ]0,+\infty[\ \longmapsto \ ]0,1[\qquad x \ \longmapsto \ f(x)$$

$$c-\text{à}-d: \ \ (\forall\, y \in]0,1[),(\exists!\ x \in]0,+\infty[) \ : \ y = f(x)$$

$$(pour\ \beta_n \in]0,1[),(\exists!\ \alpha_n \in]0,+\infty[) \ : \ \beta_n = f(\alpha_n) \ (**)$$

De $(*)$ et $(**)$ on conclut :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*),(\exists!\ \alpha_n > 0) \ : \ f(\alpha_n) = e^{\frac{-1}{n}}$$

La Question : III) 1) b)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ c-à-d $n \geq 1$

$$n+1 > n \ \Leftrightarrow \ \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \ ; \ passage\ \text{à}\ l'inverse$$

$$\Leftrightarrow \ \frac{-1}{n+1} > \frac{-1}{n} \ ; \ passage\ \text{à}\ l'opposé$$

$$\Leftrightarrow \ e^{\frac{-1}{n+1}} > e^{\frac{-1}{n}} \ ; \ Exp\ est\ \nearrow et\ bijection$$

$$\Leftrightarrow \ f(\alpha_{n+1}) > f(\alpha_n) \ ; \ d'après\ 1)a)$$

$$\Leftrightarrow \ \alpha_{n+1} > \alpha_n \ ; \ f\ est\ bijective\ et\ \nearrow$$

$$\Leftrightarrow \ (\alpha_n)_{n\geq1} \ \ est\ une\ suite\ \nearrow$$

La Question : III) 1) c)

$$f(\alpha_n)=e^{\frac{-1}{n}} \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)e^{\frac{-1}{\alpha_n}}=e^{\frac{-1}{n}}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)e^{\frac{-1}{\alpha_n}}\right)=\ln\left(e^{\frac{-1}{n}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)+\ln\left(e^{\frac{-1}{\alpha_n}}\right)=\ln\left(e^{\frac{-1}{n}}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)-\frac{1}{\alpha_n}=\frac{-1}{n}$$

La Question : III) 2) a)

D'une part, On a :

$$\left(\frac{1}{1+t}\right)-(1-t)=\frac{1-(1^2-t^2)}{1+t}=\frac{t^2}{1+t}$$

(pour $t\geq 0$) ; $t^2\geq 0$ et $(1+t)>0$

Donc : $\frac{t^2}{1+t}\geq 0$ D'où : $\left(\frac{1}{1+t}\right)-(1-t)\geq 0$

c-à-d : $\left(\frac{1}{1+t}\right)\geq(1-t) \rightsquigarrow (1)$

$$(1-t+t^2)-\left(\frac{1}{1+t}\right)=\frac{(1+t)(1-t+t^2)-1}{1+t}$$
$$=\frac{t^3}{1+t}$$

(pour $t\geq 0$) ; $t^3\geq 0$ et $(1+t)>0$

Donc : $\frac{t^3}{1+t}\geq 0$

D'où : $(1-t+t^2)-\left(\frac{1}{1+t}\right)\geq 0$

Ainsi : $(1-t+t^2)\geq\left(\frac{1}{1+t}\right) \rightsquigarrow (2)$

$$(1)\ et\ (2) \Leftrightarrow \boxed{1-t\leq\frac{1}{1+t}\leq 1-t+t^2}\ (\forall t\geq 0)$$

La Question : III) 2) b)

Soit $x\geq 0$, $(1-x)\leq\left(\frac{1}{1+x}\right)\leq(1-x+x^2)$

$$\Leftrightarrow -x\leq\left(\frac{1}{1+x}\right)-1\leq -x+x^2$$
$$\Leftrightarrow \int(-1)\,dx\leq\int\left(\frac{1}{1+x}-1\right)dx\leq\int(-x+x^2)\,dx$$

Car la continuité est vérifiée.

$$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{2}\leq -x+\ln|1+x|\leq\frac{-x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$
$$\Leftrightarrow \frac{-x^2}{2}\leq -x+\ln(1+x)\leq\frac{-x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$$

La Question : III) 3) a)

$$e^{\frac{3}{4}}\geq 2 \Leftrightarrow e^1\cdot e^{\frac{-1}{4}}\geq 2$$
$$\Leftrightarrow e^{\frac{-1}{4}}\geq 2\,e^{-1}$$
$$\Leftrightarrow f(\alpha_4)\geq f(1)\ ;\ car\ \left|\begin{array}{l} f(\alpha_4)=e^{\frac{-1}{4}}\\ f(1)=2\,e^{-1}\end{array}\right.$$
$$\Leftrightarrow \alpha_4\geq 1\ ;\ f\ est\ bijective\ et\ \nearrow$$

On considère la proposition suivante :

$$P(n)\ :\ \alpha_n\geq 1$$

Pour $n=4$, on a $\alpha_4\geq 1$. Donc $P(n)$ est vérifiée.
Soit $n\geq 4$ et on suppose que $\alpha_n\geq 1$.
Comme $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est croissante,
Alors $\alpha_{n+1}\geq\alpha_n\geq 1$. Donc $P(n+1)$ est vérifiée.
Ainsi : $\left|\begin{array}{l} P(4)\ est\ vraie\\ P(n)\Rightarrow P(n+1)\ ;\ \forall n\geq 4\end{array}\right.$.
D'où : $\forall n\geq 4$: $\alpha_n\geq 1$.

La Question : III) 3) b)

On a d'après la question 1)c) :

$$\frac{-1}{\alpha_n}+\ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)=\frac{-1}{n}$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)=\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{n} \rightsquigarrow (\star)$$

D'autre part : $\alpha_n\geq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha_n}\geq 1>0$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^2\leq -\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)+\ln\left(1+\frac{1}{\alpha_n}\right)$$
$$\leq\frac{-1}{2}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^3$$

Et ceci d'après 2)b) :

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\alpha_n^2}\leq\frac{-1}{\alpha_n}+\frac{1}{\alpha_n}-\frac{1}{n}\leq\frac{-1}{2\alpha_n^2}+\frac{1}{3\alpha_n^3}\ ;\ selon\ (\star)$$
$$\Leftrightarrow \frac{-1}{2\alpha_n^2}\leq\frac{-1}{n}\leq\frac{-1}{2\alpha_n^2}+\frac{1}{3\alpha_n^3}$$
$$\Leftrightarrow -2\alpha_n^2\left(\frac{-1}{2\alpha_n^2}+\frac{1}{3\alpha_n^3}\right)\leq -2\alpha_n^2\left(\frac{-1}{n}\right)\leq -2\alpha_n^2\left(\frac{-1}{2\alpha_n^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow 1-\frac{2}{3\alpha_n}\leq\frac{2\,\alpha_n}{n}\leq 1$$

La Question : III) 3) c)

$$\alpha_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{\alpha_n} \leq 1 \Rightarrow \frac{-2}{3\alpha_n} \geq \frac{-2}{3}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) \geq 1 - \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) \geq \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq 1 - \frac{2}{3\alpha_n} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1 \quad ; \ d'après\ 3)b)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq 1$$

$$\Rightarrow \frac{n}{6} \leq \alpha_n^2 \leq \frac{n}{2} \quad ; \ car\ n \geq 4 > 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{n}{6}} \leq \alpha_n \leq \sqrt{\frac{n}{2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\sqrt{\frac{n}{6}}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} +\infty} \leq \alpha_n$$

$$\Rightarrow \lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty$$

La Question : III) 3) d)

$$\lim_{n\infty}(\alpha_n) = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n\infty}\left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right) = 1 - \frac{2}{3(+\infty)} = 1 - 0 = 1$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(1 - \frac{2}{3\alpha_n}\right)}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1} \leq \frac{2\alpha_n^2}{n} \leq \underbrace{1}_{\xrightarrow[n\infty]{} 1}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\infty}\left(\frac{2\alpha_n^2}{n}\right) = 1$$

$$\lim_{n\infty}\left(\alpha_n\sqrt{\frac{2}{n}}\right) = \lim_{n\infty}\sqrt{\frac{2\alpha_n^2}{n}} = \sqrt{\lim_{n\infty}\frac{2\alpha_n^2}{n}} = \sqrt{1} = 1$$

Khmiset

Le Premier Exercice

La Question : 1)

La loi de composition interne :

Soient a et b deux éléments de G :

$$(a,b) \in G^2 \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq a < 1 \\ 0 \leq b < 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 0 \leq (a+b) < 2$$

$$\Rightarrow E(a+b) \in \{0;1\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq (a+b) \leq 1 \ si\ E(a+b) = 0 \\ 1 \leq (a+b) < 2 \ si\ E(a+b) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq (a+b) - 0 < 1 \ avec\ E(a+b) = 0 \\ 0 \leq (a+b) - 1 < 1 \ avec\ E(a+b) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0 \leq (a+b) - E(a+b) < 1 \ avec\ E(a+b) = 0 \\ 0 \leq (a+b) - E(a+b) < 1 \ avec\ E(a+b) = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a * b \in G$$

Deuxième méthode :

Rappel : $\begin{cases} (\forall m \in \mathbb{Z})(\forall x \in \mathbb{R}) : E(m+x) = m + E(x) \\ (\forall x \in \mathbb{R}) : E(x) \in \mathbb{Z} \\ (\forall x \in \mathbb{R}) : E(x) = 0 \Leftrightarrow 0 \leq x < 1 \end{cases}$

Soient a et b deux éléments de G :

$$\Rightarrow a * b = (a+b) - E(a+b)$$
$$\Rightarrow E(a*b) = E\big((a+b) - E(a+b)\big)$$
$$\Rightarrow E(a*b) = E(a+b) - E(a+b)$$
$$\Rightarrow E(a*b) = 0$$
$$\Rightarrow 0 \leq a*b < 1$$
$$\Rightarrow a*b \in [0,1[= G$$
$$\Rightarrow a*b \in G$$

La conclusion : $\forall (a,b) \in G^2 \ ; \ a*b \in G$

Donc $*$ est une loi de composition interne dans G.

La Question : 2)

La loi $*$ est commutative dans G puisque :

$$\forall (a,b) \in G^2 \ ; \ a*b = a+b-E(a+b) \\ = b+a-E(b+a) \\ = b*a$$

Pour l'associativité, on considère trois éléments a, b et c dans G. D'une part on a :

$$\begin{aligned}(a*b)*c &= (a*b)+c-E(a*b+c)\\ &= (a+b-E(a+b))+c-E(a+b-E(a+b+c)\\ &= (a+b+c)-E(a+b)-E(a+b+c-E(a+b))\\ &= (a+b+c)-E(a+b)-E(a+b+c)+E(a+b)\\ &= (a+b+c)-E(a+b+c) \rightsquigarrow (1)\end{aligned}$$

Et d'autre part :

$$\begin{aligned}a*(b*c) &= a+(b*c)-E(a+b*c)\\ &= \big(a+b+c-E(b+c)\big)-E\big(a+b+c-E(b+c)\big)\\ &= (a+b+c)-E(b+c)-E(a+b+c)+E(b+c)\\ &= (a+b+c)-E(a+b+c) \rightsquigarrow (2)\end{aligned}$$

A partir des résultats (1) et (2), on remarque que $(a*b)*c = a*(b*c)$. ce qui veut dire que $*$ est associative. Attention à ne pas utiliser l'égalité $E(x+y) = E(x)+E(y)$ car elle est conditionnée, ce qui montre qu'elle n'est pas toujours vérifiée.

La Question : 3)

Soit ε l'élément neutre de la loi $*$ dans G .
On écrit alors : $a*\varepsilon = \varepsilon * a = a \ ; \ \forall a \epsilon G$.

$$\begin{aligned}a*\varepsilon = a &\Leftrightarrow a+\varepsilon-E(a+\varepsilon) = a\\ &\Leftrightarrow E(a+\varepsilon) = \varepsilon\\ &\Leftrightarrow \varepsilon = \begin{cases} oubien\ 0 \\ oubien\ 1\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \varepsilon = 0 \ car \ 0 \in [0,1[= G\end{aligned}$$

D'où l'élément neutre de la loi * dans G est le nombre 0 .

La Question : 4)

Etudions maintenant la symétrie des éléments de G.
Soit a un élément de G et soit a' son symétrique dans G.

$$\begin{aligned}&\Rightarrow a*a' = 0\\ &\Rightarrow a*a' - E(a+a') = 0\\ &\Rightarrow a*a' = E(a+a')\\ &\Rightarrow a*a' = E(a+a') = \begin{cases} oubien\ 0 \\ oubien\ 1\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases} oubien\ a+a' = 0 \\ oubien\ a+a' = 1\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases} oubien\ a' = -a \\ oubien\ a' = 1-a\end{cases}\\ &\Rightarrow \begin{cases} oubien\ a' = (-a) \in]-1\,;0] \\ oubien\ a' = (1-a) \in [0\,;1[\end{cases}\\ &\Rightarrow a' = (1-a) \in [0\,;1[= G\end{aligned}$$

La conclusion :

$$(\forall a \epsilon G)(\exists!\, a' = (1-a) \in G) \ : \ a*a' = a'*a = 0$$

La Question : 5)

Soit à résoudre dans G^n l'équation suivante :

$$\underbrace{x*x*\cdots*x}_{\substack{n\ fois \\ n \in \mathbb{N} \\ n\geq 2}} = \frac{1}{n}$$

Tout d'abord, remarquez que $x*x = 2x-E(x)$.

$$\begin{aligned}x^{(3)} &= x*x*x = x*(2x-E(x))\\ &= x+2x-E(2x)-E(x+2x-E(2x))\\ &= 3x-E(2x)-E(3x)+E(2x)\\ &= 3x-E(3x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x^{(4)} &= 4x-E(4x)\\ x^{(5)} &= 5x-E(5x)\\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots\end{aligned}$$

$$x^{(n)} = nx-E(nx) \ ; \ \text{à } vérifier\ par\ récurrence\,!$$

$$(\forall n \geq 2) \ soit \ (Q_n) : x^{(n)} = nx-E(nx)$$

$$avec \ : \ x^{(n)} = \underbrace{x*x*x*\cdots*x}_{n\ fois}$$

$$pour \ n = 2, \quad on\ a \ : \ x*x = 2x-E(2x)$$

Donc (Q_2) est vérifiée . soit $n \in \mathbb{N}$ fixé tel que $n \geq 2$ et on suppose que (Q_n) est vraie .

$$\begin{aligned}(Q_n)\ est\ vraie &\Rightarrow x^{(n)} = nx-E(nx)\\ &\Rightarrow x^{(n+1)} = x*x^{(n)} = x*(nx-E(nx))\\ &\Rightarrow x^{(n+1)} = x+nx-E(nx)-E(x+nx-E(nx))\\ &\Rightarrow x^{(n+1)} = (n+1)x-E(nx)-E(x+nx)+E(nx)\\ &\Rightarrow x^{(n+1)} = (n+1)x-E\big((n+1)x\big)\\ &\Rightarrow (Q)_{n+1}\ est\ vraie\end{aligned}$$

$$Ainsi \ : \begin{cases}(Q_2)\ est\ vraie\\ (Q_n) \Rightarrow (Q_{n+1}) \ ; \ \forall n \geq 2\end{cases}$$

D'où $(\forall n \geq 2)$; $x^{(n)} = nx-E(nx) \rightsquigarrow (\star)$

A l'aide de $(\star)$ on résout aisément l'équation

$$x^{(n)} = \frac{1}{n} \ ; \ \begin{vmatrix} x \in G \\ n \geq 2\,, n \epsilon \mathbb{N}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}x^{(n)} = \frac{1}{n} &\Leftrightarrow nx-E(nx) = \frac{1}{n}\\ &\Leftrightarrow nx-\frac{1}{n} = E(nx)\end{aligned}$$

$$n \geq 2 \iff E(nx) \in \{0,1,2,\cdots,(n-1)\}$$
$$\iff \left(nx - \frac{1}{n}\right) \in \{0,1,2,\cdots,(n-1)\}$$
$$\iff nx \in \left\{\frac{1}{n}; \frac{n+1}{n}; \frac{2n+1}{n}; \cdots; \frac{n(n-1)+1}{n}\right\}$$
$$\iff x \in \left\{\frac{1}{n^2}; \frac{n+1}{n^2}; \frac{2n+1}{n^2}; \cdots; \frac{n(n-1)+1}{n^2}\right\}$$

D'où l'ensemble des solutions de cette équation est défini explicitement par :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{n^2}; \frac{n+1}{n^2}; \frac{2n+1}{n^2}; \cdots; \frac{n(n-1)+1}{n^2}\right\}$$

Par exemple : l'équation $x^{(9)} = \frac{1}{9}$ admet exactement neuf solutions dans $[0,1[$, les voici :

$$\mathcal{S}_9 = \left\{\frac{1}{81}, \frac{10}{81}, \frac{19}{81}, \frac{28}{81}, \frac{37}{81}, \frac{46}{81}, \frac{55}{81}, \frac{64}{81}, \frac{73}{81}\right\}$$

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\text{Rappel Formules D'Euler} : \left| \begin{array}{l} \cos(x) = \left(\dfrac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}\right) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \\ \sin(x) = \left(\dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}\right) \quad ; \quad \forall x \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

$$On\ a : \sin\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2i}\left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)$$
$$\iff 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{2i}{2i}\left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$
$$= e^{i\left(\frac{x-y+x+y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y-x-y}{2}\right)}$$
$$= e^{ix} - e^{iy}$$

De même : $\cos\left(\frac{x-y}{2}\right) = \frac{1}{2}\left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)$

$$2\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)} = \frac{2}{2}\left(e^{i\left(\frac{x-y}{2}\right)} - e^{-i\left(\frac{x-y}{2}\right)}\right)e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$
$$= e^{i\left(\frac{x-y+x+y}{2}\right)} + e^{i\left(\frac{-x+y+x+y}{2}\right)}$$
$$= e^{ix} + e^{iy}$$

La Question : I) 2)

Résolution de l'équation (E_θ) dans $\mathbb{C}$.

$$\Delta = (-2i)^2 + 4\left(1 + e^{2i\theta}\right)$$
$$= -4 + 4 + 4e^{2i\theta}$$
$$= \left(2e^{i\theta}\right)^2$$

$$z_1 = \frac{2i - 2e^{i\theta}}{2} = i - e^{i\theta} = e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{i\theta}$$
$$= 2i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}\right)}$$
$$= 2i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

$$z_2 = \frac{2i + 2e^{i\theta}}{2} = i + e^{i\theta} = e^{\frac{i\pi}{2}} + e^{i\theta}$$
$$= 2\cos\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+\theta}{2}\right)}$$
$$= 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}$$

La Question : I) 3)

Rappel : $\left| \begin{array}{l} A, B\ et\ C\ sont \\ colinéaires \end{array} \right. \iff \left(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}\right) \equiv 0[\pi]$

$$\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}} = \left(\frac{z_A - z_O}{z_B - z_O}\right) = \frac{2i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}{2\cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}}$$
$$= i\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Longrightarrow \arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}}\right) \equiv \arg\left(i\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right)[2\pi]$$
$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \arg(i) + \arg\left(\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right)[2\pi]$$
$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + 0\ [2\pi]$$
$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$$
$$\Longrightarrow \left(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA}\right) \not\equiv 0\ [\pi]$$
$$\Longrightarrow \left| \begin{array}{l} A, B\ et\ C\ ne\ sont \\ pas\ colinéaires \end{array} \right.$$

OAB Est un triangle rectangle :

On a : $OA = |z_A - z_O| = |z_A| = \left|2i\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$

$$= |i| \times 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right| \times \left|e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= 2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right)\right| \quad ; \quad la\ valeur\ absolue$$

$$OB = |z_B - z_O| = |z_B| = \left|2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| \times \left|e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= 2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| \; ; \; la\ valeur\ absolue$$

$$AB = |z_B - z_A|$$
$$= \left|2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} - 2i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= \left|2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) - i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= \left|2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right)e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= \left|2e^{i\left(\frac{\theta}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)}\right|$$
$$= |2e^{i\theta}| = 2$$

$$\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 + \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 + \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 = 1$$
$$\Leftrightarrow \quad 4\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 + 4\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|^2 = 4$$
$$\Leftrightarrow \quad \left(2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)^2 + \left(2\left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|\right)^2 = 2^2$$
$$\Leftrightarrow \quad OA^2 + OB^2 = AB^2$$

D'après le théorème de Pythagore , on conclut que OAB est un triangle rectangle en O .
Pour que OAB soit isocèle, il suffit qu'il vérifie $OA = OB$

$$OA = OB \quad \Leftrightarrow \quad \left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| = \left|\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}\right| = 1 \; ; \; avec\ \theta \not\equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \quad \left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right| = 1 \; ; \; avec\ \theta \not\equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \quad \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \pm 1 \; ; \; avec\ \theta \not\equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi]$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien\ :\ \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ oubien\ :\ \tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \tan\left(\frac{-\pi}{4}\right) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien\ :\ \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[\pi] \\ oubien\ :\ \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) \equiv \frac{-\pi}{4}[\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien\ :\ \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{\pi}{4} + k\pi \; ; \; k\epsilon\mathbb{Z} \\ oubien\ :\ \left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right) = \frac{-\pi}{4} + k'\pi \; ; \; k'\epsilon\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien\ :\ \theta = -2k\pi \; ; \; k\epsilon\mathbb{Z} \\ oubien\ :\ \theta = \pi - 2k'\pi \; ; \; k'\epsilon\mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien\ :\ \theta \equiv 0[2\pi] \\ oubien\ :\ \theta \equiv \pi[2\pi] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad \theta \equiv 0[\pi]$$

Donc OAB est isocèle Si $\theta \equiv 0[\pi]$.

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

La rotation r est définie par :

$$r\left(A, \frac{\pi}{3}\right) : (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$$
$$M(z) \longmapsto M'(z')$$

$$r(M) = M' \Leftrightarrow (z_{M'} - z_A) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_M - z_A)$$
$$\Leftrightarrow (z' - a) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - a)$$
$$\Leftrightarrow z' = e^{\frac{i\pi}{3}}(z - a) + a$$
$$\Leftrightarrow z' = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z - a) + a$$

Ainsi la rotation r sera définie par :

$$r\left(A, \frac{\pi}{3}\right) : (\mathcal{P}) \longmapsto (\mathcal{P})$$
$$M(z) \longmapsto M'\left(\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z - a) + a\right)$$

$$r(B) = B' \quad \Leftrightarrow \quad z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z_B - a) + a$$
$$\Leftrightarrow \quad z_{B'} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(b + i - a) + a$$
$$\Leftrightarrow \quad z_{B'} = \left(\frac{b + a - \sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1 - \sqrt{3} + \sqrt{3}a}{2}\right)$$

La Question : II) 2)

$$B' \epsilon (OY) \quad \Leftrightarrow \quad z_{B'} \epsilon\ i\mathbb{R}$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathfrak{Re}(z_{B'}) = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \frac{b + a - \sqrt{3}}{2} = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad a + b = \sqrt{3}$$

Dans ce cas On retrouve :

$$z_{B'} = \left(\frac{b+a-\sqrt{3}}{2}\right) + i\left(\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}a}{2}\right)$$
$$= i\left(\frac{1-\sqrt{3}+\sqrt{3}a}{2}\right) \in i\mathbb{R}$$

La Question : II) 3) a)

$$le\ cas\ : \left| \begin{array}{l} A(\sqrt{3}) \\ B(i) \\ C(-i) \\ D\left(2+\sqrt{3}(1-2i)\right) \end{array}\right.$$

Pour le triangle ABC on a :

$$\left| \begin{array}{l} AB = |i-\sqrt{3}| = \sqrt{1^2+(-\sqrt{3})^2} = 2 \\ AC = |-i-\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2 \\ BC = |-i-i| = \sqrt{0^2+(-2)^2} = 2 \end{array}\right.$$

Donc ABC est un triangle équilatéral.

Pour le triangle ACD on a :

$$\left| \begin{array}{l} AC = |-i-\sqrt{3}| = \sqrt{(-1)^2+(-\sqrt{3})^2} = 2 \\ AD = |2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}i-\sqrt{3}| = \sqrt{2^2+(-2\sqrt{3})^2} = 4 \\ DC = |-i-2-\sqrt{3}+2\sqrt{3}i| = \sqrt{(-2-\sqrt{3})^2+(2\sqrt{3}-1)^2} = \sqrt{20} \end{array}\right.$$

On remarque que $2^2+4^2 = \left(\sqrt{20}\right)^2$

c-à-d que : $AC^2+AD^2 = DC^2$

c-à-d que le triangle ACD est un triangle rectangle.

La Question : II) 3) b)

Soit T la translation définie par :

$$T\ :\ \begin{array}{rcl} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$$

Et Soit r la rotation définie par :

$$r\ :\ \begin{array}{rcl} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'\left(\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)(z-\sqrt{3})+\sqrt{3}\right) \end{array}$$

$$\begin{aligned} T(D) = F \quad &\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{AC} \\ &\Leftrightarrow \quad (z_F - z_D) = (z_c - z_A) \\ &\Leftrightarrow \quad \left(z_F - 2 - \sqrt{3} + 2\sqrt{3}i\right) = \left(-i-\sqrt{3}\right) \\ &\Leftrightarrow \quad z_F = -i - 2\sqrt{3}i + 2 \\ &\Leftrightarrow \quad z_F = 2 - i\left(1+2\sqrt{3}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r(D) = E \quad &\Leftrightarrow \quad z_E = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(z_D-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad z_E = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(2+\sqrt{3}-2\sqrt{3}i-\sqrt{3}\right)+\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad z_E = \left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)\left(2-2\sqrt{3}i\right)+\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad z_E = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)2(1-\sqrt{3}i)+\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad z_E = 1^2 - \left(i\sqrt{3}\right)^2 + \sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad z_E = 1-(-3)+\sqrt{3} \\ &\Leftrightarrow \quad z_E = 4+\sqrt{3} \end{aligned}$$

Montrons d'abord que BEF est équilatéral.

$$On\ a\ :\ \left| \begin{array}{l} z_B = i \\ z_E = 4+\sqrt{3} \\ z_F = 2-\left(1+2\sqrt{3}\right)i \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} \Longrightarrow \quad BE = |z_E - z_B| &= \left|4+\sqrt{3}-i\right| \\ &= \sqrt{\left(4+\sqrt{3}\right)^2+(-1)^2} \\ &= \sqrt{16+8\sqrt{3}+3+1} \\ &= \sqrt{20+8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Et\ :\quad BF = |z_F - z_B| &= \left|2-\left(1+2\sqrt{3}\right)i-i\right| \\ &= \left|2-i\left(2+2\sqrt{3}\right)\right| \\ &= \sqrt{2^2+\left(2+2\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{4+4+8\sqrt{3}+12} \\ &= \sqrt{20+8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Et\ :\quad EF = |z_F - z_E| &= \left|2-i-2\sqrt{3}i-4-\sqrt{3}\right| \\ &= \left|-\left(2+\sqrt{3}\right)-i\left(1+2\sqrt{3}\right)\right| \\ &= \left|\left(2+\sqrt{3}\right)+i\left(1+2\sqrt{3}\right)\right| \\ &= \sqrt{\left(2+\sqrt{3}\right)^2+\left(1+2\sqrt{3}\right)^2} \\ &= \sqrt{4+4\sqrt{3}+3+1+4\sqrt{3}+12} \\ &= \sqrt{20+8\sqrt{3}} \end{aligned}$$

On remarque que $BE = BF = EF = \sqrt{20+8\sqrt{3}}$
Donc BEF est bien un triangle équilatéral.

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

Rappel : (le petit théorème de Fermat)

$$\left| \begin{array}{l} p \in \mathbb{P} \\ a \wedge p = 1 \end{array} \right. \implies a^{p-1} \equiv 1[p]$$

On a p est un nombre premier. On a aussi $a \wedge p = 1$ car $a < p$. Donc c'est impossible d'avoir p soit un diviseur de a. Donc, d'après le petit théorème de Fermat, On écrit : $a^{p-1} \equiv 1[p]$. D'où $a\,(a^{p-2}) \equiv 1[p]$. Et cela veut dire que a^{p-2} est une solution de (E) dans $\mathbb{Z}$.

La Question : 1) b)

Soit r le reste de la division euclidienne de a^{p-2} sur p

$$\left| \begin{array}{l} a^{p-2} \in \mathbb{N} \\ p \in \mathbb{N} \end{array} \right. \implies \left| \begin{array}{l} \exists ! \, r \in \{0\,;1\,;2\,;\,\cdots;p-1\} \\ a^{p-2} \equiv r[p] \end{array} \right.$$

Si $r = 0$ alors p divise a^{p-1} .

$$\begin{aligned} &\implies p \text{ divise } a \text{ car } p \text{ est premier} \\ &\implies p < a \\ &\implies \text{Absurde car } a < p \\ &\implies r \neq 0 \end{aligned}$$

Donc $a^{p-2} \equiv r[p]$ et $r \in \{1\,;2\,;\,\cdots;\,p-1\,\}$.
D'où $a^{p-1} \equiv ar[p]$ et $r \in A_p$. Or d'après le petit théorème de Fermat on écrit :
$a^{p-1} \equiv 1[p]$ car $p \in \mathbb{P}$ et $a \wedge p = 1$.

résumons : $\begin{cases} a^{p-1} \equiv ar[p] \; ; \; r \in A_p \\ a^{p-1} \equiv 1[p] \end{cases}$

$$\implies \begin{cases} ar \equiv 1[p] \\ r \in A_p \end{cases} \; ; \; car \text{ "}\equiv\text{" } est\ transitive$$

r est donc la seule solution de (E) dans A_p

La Question : 2) a)

On pose $p = 31$,
pour $a = 2$ on a : $(\exists ! \, r \in A_{31})$; $2^{29} \equiv r[31]$ $(*)$.
Or, $2^5 = 32 \equiv 1[31] \implies (2^5)^5 \equiv 1^5[31]$

$$\begin{aligned} &\implies 2^{25} \equiv 1[31] \\ &\implies 2^4 \times 2^{25} \equiv 2^4[31] \\ &\implies \boxed{2^{29} \equiv 16[31]} \; (**) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (*) \; et \; (**) &\implies r \equiv 16[31] \\ &\implies \boxed{31/(r-16)} \; ■ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r \in A_{31} \;\; Alors \;\; r &\in \{1\,;2\,;\cdots;30\} \\ &\implies \boxed{|r-16| < 31} \; ■■ \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ■ \; et \; ■■ &\implies |r-16| = 0 \\ &\implies \boxed{r = 16} \end{aligned}$$

Pour $a = 3$; $\exists ! \, r \in A_{31}$; $3^{29} \equiv r[31]$ $\otimes$
Or $3^6 = 729 \equiv 16[31]$

$$\begin{aligned} &\implies (3^6)^4 \equiv (2^4)^4[31] \\ &\implies 3^{24} \equiv 2^{16}[31] \;\; (\star) \end{aligned}$$

Aussi $2^{16} = (2^5)^3 \times 2 \equiv 1^3 \times 2[31]$

$$\implies 2^{16} \equiv 2[31] \;\; (\star\star)$$

$$\begin{aligned} (\star) \; et \; (\star\star) &\implies 3^{24} \equiv 2[31] \\ &\implies 3^{24} \times 3^5 \equiv 2 \times 3^5[31] \\ &\implies 3^{29} \equiv 486[31] \\ &\implies 3^{29} \equiv 21[31] \;\; \otimes\otimes \;\; car \;\; 486 \equiv 21[31] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \otimes \; et \; \otimes\otimes &\implies r \equiv 21[31] \\ &\implies \boxed{31/(r-21)} \; (\circledast) \end{aligned}$$

$comme$ $r \in A_{31} = \{1\,;2\,;\,\cdots;30\}$
$Alors$: $\boxed{|r-21| < 31}$ $(\circledast\circledast)$

$$\begin{aligned} \circledast \; et \; \circledast\circledast &\implies |r-21| = 0 \\ &\implies \boxed{r = 21} \end{aligned}$$

La Question : 2) b)

Soit x une solution de l'équation (F_1)

$$x \;\; est \;\; solution \;\; de \;\; (F_1) \iff \begin{cases} 2x \equiv 1[31] \\ 2(16) \equiv 1[31] \end{cases}$$

On effectue la soustraction entre ces deux égalités modulo 31 on trouve :

$$\begin{aligned} 2(x-16) \equiv 0[31] &\implies 31 \; divise \; 2(x-16) \\ &\implies 31/(x-16) \;\; car \;\; 31 \wedge 2 = 1 \\ &\implies (\exists k \in \mathbb{Z}) \; ; \; x - 16 = 31k \\ &\implies (\exists k \in \mathbb{Z}) \; ; \; x = 31k + 16 \end{aligned}$$

Inversement : Montrons que tous les entiers relatifs de la forme $(31k+16)$ vérifient-bien l'équation (F_1)

$On\ a$: $2(31k+16) = 62k + 32$

$comme$ $\begin{cases} 62k \equiv 0[31] \\ 31 \equiv 1[31] \end{cases}$ $alors$ $(62k+32) \equiv 1[31]$

D'où l'ensemble des solutions de (F_1) est définie implicitement par : $\mathcal{S} = \{31k + 16 \; ; \; k \in \mathbb{Z}\}$

De même, pour l'équation (F_2) : $3x \equiv 1[31]$
Sachant que $3 \times 21 \equiv 1[31]$ $d'après\ 2)a)$

$$\begin{cases} 3x \equiv 1[31] \\ 3(21) \equiv 1[31] \end{cases} \Rightarrow 3(x-21) \equiv 0[31]$$
$$\Rightarrow 31/3(x-21)$$
$$\Rightarrow 31/(x-21) \ ; \ car\ 31 \wedge 3 = 1$$
$$\Rightarrow (\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ x - 21 = 31k$$
$$\Rightarrow (\exists k \epsilon \mathbb{Z}) \ ; \ x = 31k + 21$$

<u>**Inversement**</u>, On montre que tout entier relatif de la forme $(31k+21)$ est bien une solution de (F_2)

$$On\ a\ :\ 31k \equiv 0[31] \Rightarrow 3(31k) \equiv 0[31]$$
$$\Rightarrow 3(31k) + 3(21) \equiv 1[31]$$
$$car\ 3(21) = 63 \equiv 1[31]$$
$$\Rightarrow 3(31k+21) \equiv 1[31]$$

D'où l'ensemble des solutions de (F_2) est défini implicitement par $\mathcal{S}_2 = \{\, 31k + 21 \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \,\}$

La Question : 2) c)

Soit x une solution de (F) dans $\mathbb{Z}$.

$$x\ est\ solution\ de\ (F) \Leftrightarrow 6x^2 - 5x + 1 \equiv 0[31]$$
$$\Leftrightarrow (2x-1)(3x-1) \equiv 0[31]$$
$$\Leftrightarrow 31/(2x-1)(3x-1)$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien\ 31/(2x-1) \\ oubien\ 31/(3x-1) \end{cases} ; \ car\ 31 \epsilon \mathbb{P}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} oubien\ 2x \equiv 1[31] \\ oubien\ 3x \equiv 1[31] \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien\ x\ est\ solution\ de\ (F_1) \\ ou\ bien\ x\ est\ solution\ de\ (F_2) \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien\ x \epsilon \{31k+16 \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z}\} \\ ou\ bien\ x \epsilon \{31k+21 \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z}\} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow x \epsilon \{\, 31k+16 \ ; \ 31k+21 \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \,\}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{S} = \{\, 31k+16 \ ; \ 31k+21 \ ; \ k\epsilon\mathbb{Z} \,\}$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\int_0^x h(t)\,dt = \int_0^x (e^t - t - 1)\,dt$$
$$= \int_0^x e^t\,dt - \int_0^x t\,dt - \int_0^x dt$$
$$= [e^t]_0^x - \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x - [t]_0^x$$
$$= e^x - 1 - \frac{x^2}{2} - x$$
$$\Rightarrow e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t)\,dt$$

La Question : I) 2)

La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier comme étant une somme de fonctions toutes dérivables.

$$h'(x) = e^x - 1 \ ; \ (\forall x \epsilon \mathbb{R})$$

$$h'(x) \leq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x \leq 0$$
$$\Leftrightarrow x \epsilon\ ]-\infty, 0]$$
$$\Leftrightarrow h\ est\ décroissante\ sur\ ]-\infty, 0]$$

$$h'(x) \geq 0 \Leftrightarrow e^x - 1 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \geq 0$$
$$\Leftrightarrow x \epsilon\ [0, +\infty[$$
$$\Leftrightarrow h\ est\ croissante\ sur\ [0, +\infty[$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

La Question : I) 3)

On a d'après la question 1) :

$$(\forall x \epsilon \mathbb{R}) \ ; \ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t)\,dt$$
$$\Rightarrow e^x - (1+x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x h(t)\,dt$$
$$\Rightarrow \frac{e^x - (1+x)}{x^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \ ; \ x \neq 0$$
$$\Rightarrow (\forall x \neq 0) \ ; \ \frac{h(x)}{x^2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \ \ (*)$$

Soient $x \epsilon \mathbb{R}_+^*$ et $t \epsilon [0, x]$. (t est variable muette)

$$t \epsilon [0,x] \Rightarrow 0 \leq t \leq x$$
$$\Rightarrow h(0) \leq h(t) \leq h(x) \ ; \ car\ h \nearrow [0, +\infty[$$
$$\Rightarrow 0 \leq h(t) \leq h(x)$$
$$\Rightarrow \int_0^x 0\,dt \leq \int_0^x h(t)\,dt \leq \int_0^x h(x)\,dt$$

J'ai introduit $\int dt$ car la continuité est vérifiée et aussi $0 < x$ gardera le sens de l'ordre inchangé

$$\Rightarrow 0 \leq \int_0^x h(t)\,dt \leq (x-0)h(x)$$
$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \leq \frac{x\,h(x)}{x^2} \ ; \ x^2 > 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{h(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \leq \frac{h(x)}{x} \ \ ; \ selon\ (*)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{h(x)}{x} + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \frac{h(x)}{x} + \frac{1}{2} \ \ ; \ \forall x > 0$$

La Question : I) 4)

Soient x dans $\mathbb{R}_-^*$ et t dans $[x, 0]$.

$$\begin{aligned} t \in [x,0] \quad &\Rightarrow \quad x \leq t \leq 0 \\ &\Rightarrow \quad h(x) \geq h(t) \geq h(0) \ ; \ h \searrow]-\infty, 0] \\ &\Rightarrow \quad h(x) \geq h(t) \geq 0 \\ &\Rightarrow \quad \int_x^0 h(x)\,dt \geq \int_x^0 h(t)\,dt \geq \int_x^0 0\,dt \end{aligned}$$

J'ai introduit $\int dt$ car la continuité est vérifiée et aussi $x < 0$ gardera le sens de l'ordre inchangé

$$\Rightarrow \quad (0 - x)h(x) \geq -\int_0^x h(t)\,dt \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad -x\,h(x) \geq -\int_0^x h(t)\,dt \geq 0$$

$$\Rightarrow \quad x\,h(x) \leq \int_0^x h(t)\,dt \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x\,h(x)}{x^2} \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \leq \frac{0}{x^2} \ \ ; \ x > 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h(x)}{x} \leq \frac{1}{x^2}\int_0^x h(t)\,dt \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{h(x)}{x} \leq \frac{h(x)}{x^2} - \frac{1}{2} \leq 0 \ ; \ selon\ (*)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \leq \frac{h(x)}{x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \frac{1}{2} \ \ ; \ \forall x < 0$$

La Question : I) 5)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)}{x}\right) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2}\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - 1}{x} - 1\right) \\ &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - e^0}{x - 0}\right) - \lim_{x\to 0} 1 \\ &= (e^x)'_{/x=0} - 1 \\ &= e^0 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0}\left(\frac{h(x)}{x}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{h(x)}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{h(x)}{x}\right) = 0$$

Si ($x \in \mathbb{R}_+^*$) on obtient selon la question 3) :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \underbrace{\left(\frac{h(x)}{x} + \frac{1}{2}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{2}}$$

$$D'où : \ \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \quad (\odot)$$

Si ($x \in \mathbb{R}_-^*$) on obtient selon la question 4) :

$$\underbrace{\left(\frac{1}{2} + \frac{h(x)}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0^-]{} \frac{1}{2}} \leq \frac{e^x - (x+1)}{x^2} \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)}_{\xrightarrow[x\to 0^-]{} \frac{1}{2}}$$

$$D'où : \ \lim_{x\to 0^-}\left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2} \quad (\odot\odot)$$

De $(\odot)$ et $(\odot\odot)$ on tire la limite suivante :

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x - (x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

Sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$, il est clair que f est continue comme étant quotient de deux fonctions continues et $(e^x - 1) \neq 0$.
Etudions alors la continuité en 0 .

$$\begin{aligned} \lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{e^x - 1}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{e^x - 1}{x}\right)} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\left(\frac{e^x - e^0}{x - 0}\right)} = \frac{1}{(e^x)'_{/x=0}} \\ &= \frac{1}{e^0} = 1 = f(0) \end{aligned}$$

Donc f est continue en 0 .
Finalement f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La Question : II) 2)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x}-\frac{1}{x}}\right)$$
$$= \frac{1}{+\infty - 0} = 0$$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale de la courbe $(\mathcal{C}_f)$ au voisinage de $+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = \frac{-\infty}{e^{-\infty}-1}$$
$$= \frac{-\infty}{0^+-1} = \frac{-\infty}{-1} = +\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x(e^x-1)} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e^x-1}\right)$$
$$= \frac{1}{e^{-\infty}-1} = \frac{1}{0^+-1} = -1$$

$$\lim_{x\to-\infty}(f(x)+1x) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x}{e^x-1}+x\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x+xe^x-x}{e^x-1}\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{xe^x}{e^x-1}\right)$$
$$= \frac{0^-}{e^{-\infty}-1} = \frac{0^-}{0^+-1} = 0$$

Donc la droite $(\Delta) : y = -x$ (la $2^{ème}$ bissectrice) est une asymptote à $(\mathcal{C}_f)$

La Question : II) 3)

On se sert des deux limites suivantes :

$$\underbrace{\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = 1}_{= \lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\frac{e^x-e^0}{x-0}}\right) = \frac{1}{e^0}} \quad et \quad \underbrace{\lim_{x\to0}\left(\frac{e^x-(x+1)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}}_{D'après\ I)5)}$$

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = \lim_{x\to0}\left(\frac{\frac{x}{e^x-1}-1}{x}\right)$$
$$= \lim_{x\to0}\left(\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}\right) = \lim_{x\to0}\frac{-x\left(e^x-(x+1)\right)}{x^2(e^x-1)}$$
$$= \lim_{x\to0} -\left(\frac{e^x-(x+1)}{x^2}\right)\left(\frac{x}{e^x-1}\right) = -\left(\frac{1}{2}\right)\times(1)$$
$$= \frac{-1}{2} = f'(0)$$

D'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{-1}{2}$.

La Question : II) 4)

Il est clair que f est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ car c'est un quotient de deux fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $(e^x-1) \neq 0$; $\forall x \epsilon \mathbb{R}^*$

$$f'(x) = \left(\frac{x}{e^x-1}\right)' = \frac{1(e^x-1)-e^x(x)}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{(1-x)e^x-1}{(e^x-1)^2}$$
$$= \frac{\varphi(x)}{(e^x-1)^2} \ ; \ \varphi(x) = (1-x)e^x - 1$$

La Question : II) 5)

φ est une fonction continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier . $\varphi'(x) = -e^x + (1-x)e^x = -xe^x$

Remarque : $\varphi'(x) \geq 0 \ sur \ \mathbb{R}^- \ et \ \varphi'(x) \leq 0 \ sur \ \mathbb{R}^+$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi'(x)$		$+$	0	$-$	
φ	-1	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\infty$

D'après ce beau tableau, On remarque que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R} \ ; \ \varphi(x) \leq 0$$
$$d'où : \ \forall\, x \in \mathbb{R}^* \ ; \ \varphi(x) < 0$$

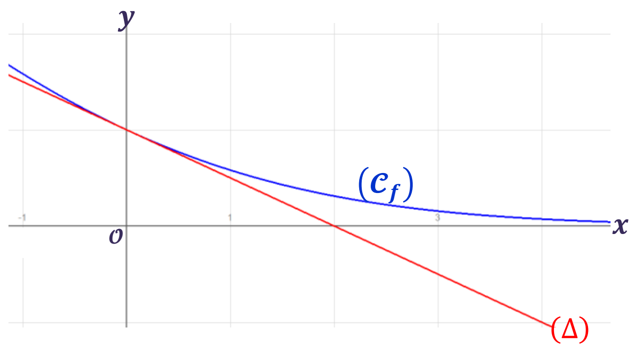
La Question : II) 6)

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$\varphi(x)$		$-$	0	$-$	
$f'(x)$		$-$	$\Vert$	$-$	
f	$+\infty$	$\searrow$	1	$\searrow$	0

La Question : II) 7)

Soit (Δ) la tangente de $\mathcal{C}_f$ en 0.

$$(\Delta) : \ y = (x-0)f'(0) + f(0)$$
$$(\Delta) : \ y = -\frac{1}{2}x + 1$$



La Troisième partie

La Question : III) 1)

Soit g la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ comme différence de deux fonctions toutes continues sur $\mathbb{R}$
Soient x et y deux éléments de $\mathbb{R}$ tels que $x > y$.
Alors $f(x) < f(y)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Et On a aussi $-x < -y$. en passant à la somme, on obtient : $f(x) - x < f(y) - y$ c-à-d $g(x) < g(y)$

Ainsi, On a pu montrer l'implication suivante :

$$x > y \implies g(x) < g(y)$$

Ce qui veut dire que la fonction g est strictement décroissante sur $\mathbb{R}$. et à cause de la continuité, g est une bijection de $\mathbb{R}$ dans $g(\mathbb{R})$.

$$g(\mathbb{R}) = g(\,]-\infty;+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x)\ ;\ \lim_{x\to-\infty} g(x)\right[$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - x) = 0 - (+\infty) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - x) = +\infty - (-\infty) = +\infty$$

Ainsi, g est une bijection de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.
Comme 0 est un élément de $\mathbb{R}$, Alors il admet un antécédent α dans $\mathbb{R}$ via la bijection g.
Dans le cas général on écrit :

$$(\forall y \epsilon \mathbb{R})(\exists!\, x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(x) = y$$

$$(\,pour\ 0 \in \mathbb{R}\,)(\exists!\, \alpha \epsilon \mathbb{R})\ ;\ g(\alpha) = 0$$

$$(\exists!\, \alpha \epsilon \mathbb{R})\quad ;\quad f(\alpha) = \alpha$$

c-à-d que l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution α dans $\mathbb{R}$, ($f(\alpha) = \alpha$)

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\alpha}{e^{\alpha} - 1} = \alpha \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{e^{\alpha} - 1} = 1\ ;\ avec\ \alpha \neq 0 \\
&\Leftrightarrow e^{\alpha} - 1 = 1\ ;\ avec\ \alpha \neq 0 \\
&\Leftrightarrow e^{\alpha} = 2\ ;\ avec\ \alpha \neq 0 \\
&\Leftrightarrow \alpha = \ln 2\ ;\ avec\ \alpha \neq 0
\end{aligned}$$

La Question : III) 2) a)

$$\begin{aligned}
pour\ x > 0\ ;\ f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{\varphi(x)}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{2\varphi(x) + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\
&= \frac{2e^x(1 - x) - 2 + (e^x - 1)^2}{2(e^x - 1)^2} \\
&= \frac{e^{2x} - 2x\, e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}
\end{aligned}$$

La Question : III) 2) b)

$$Soient\ :\ \begin{cases} (\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ h(x) = e^x - x - 1 \\ (\forall x \epsilon \mathbb{R})\ ;\ \psi(x) = e^{2x} - 2x - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
Pour\ x \geq 0 &\implies e^x \geq e^0\ ;\ car\ Exp\ est\ \nearrow \\
&\implies e^x - 1 \geq 0 \\
&\implies h'(x) \geq 0\ ;\ car\ h'(x) = e^x - 1 \\
&\implies h\ est\ \nearrow\ sur\ \mathbb{R}^+ \\
&\implies h(x) \geq h(0) \\
&\implies h(x) \geq 0\quad (*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pour\ x \epsilon \mathbb{R} \implies \psi'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2x\, e^x \\
&= 2e^x(e^x - 1 - x) \\
&= 2e^x h(x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
pour\ x \epsilon \mathbb{R}^+ &\implies e^x > 0\ \ et\ \ h(x) \geq 0 \\
&\implies 2e^x\, h(x) \geq 0 \\
&\implies \psi'(x) \geq 0 \\
&\implies \psi(x)\ est\ \nearrow\ sur\ \mathbb{R}^+ \\
&\implies \psi(x) \geq \psi(0) \\
&\implies \psi(x) \geq 0 \\
&\implies e^{2x} - 2x\, e^x - 1 \geq 0
\end{aligned}$$

La déduction : $x \in \mathbb{R}^+ \implies e^{2x} - 2x\, e^x - 1 \geq 0$

$$\begin{aligned}
&\implies \frac{e^{2x} - 2x\, e^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \geq 0 \\
&\implies f'(x) + \frac{1}{2} \geq 0 \\
&\implies f'(x) \geq \frac{-1}{2} \\
&\implies 0 > f'(x) \geq -\frac{1}{2}\ ;\ car\ \varphi(x) < 0
\end{aligned}$$

La Question : III) 3) a)

On a vu, d'après les résultats précédents, que f est continue et est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier. Donc l'application du TAF est valable sur n'importe quel intervalle $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$.
Pour $[\alpha,u_n]\subset\mathbb{R}$; $\exists\, c\,\epsilon\,]\alpha,u_n[\ :\ \dfrac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}=f'(c)$

$$\Longrightarrow\ \exists\, c\,\epsilon\,]\alpha,u_n[\subset\mathbb{R}^+\ ;\ \left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|=|f'(c)|$$

$$On\ a\ \ c\,\epsilon\,]\alpha,u_n[\subset\mathbb{R}^+$$
$$\Longrightarrow\ \frac{-1}{2}\leq f'(c)<0\ ;\ d'après\ 2)b)$$
$$\Longrightarrow\ \frac{-1}{2}\leq f'(c)<0<\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow\ \frac{-1}{2}\leq f'(c)<\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow\ |f'(c)|\leq\frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow\ \left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right|\leq\frac{1}{2}\quad ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N}$$
$$\Longrightarrow\ |f(u_n)-f(\alpha)|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\quad ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N}$$
$$\Longrightarrow\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|\quad ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N}$$

La Question : III) 3) b)

Par récurrence, On démontre aisément la véracité du prédicat $P(n)$ défini ainsi :

$$(P_n)\ :\ |u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^n(1-\alpha)$$

Pour $n=0$; $|1-\ln 2|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^0|1-\ln 2|$

Ainsi l'instance $P(0)$ est vérifiée (c-à-d vraie)

Pour $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé, On suppose que $P(n)$ est vraie

$$(P_n)\ est\ vraie\ \Longrightarrow\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$
$$\Longrightarrow\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n|1-\alpha|$$
$$\Longrightarrow\ |u_{n+1}-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(1-\alpha)$$
$$\Longrightarrow\ P(n+1)\ est\ vraie$$

$$Finalement\ :\ \begin{cases}P(0)\ est\ vraie\\ P(n)\ implique\ P(n+1)\ ;\ \forall n\epsilon\mathbb{N}\end{cases}$$

D'où, d'après le principe de récurrence, On déduit que : $(\forall n\epsilon\mathbb{N})$; $|u_n-\alpha|\leq\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}(1-\alpha)$

On remarque que $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$, qui converge car $\left|\frac{1}{2}\right|<1$ et $(1-\alpha)$ est un nombre réel. On obtient alors la situation suivante :

$$|u_n-\alpha|\leq\underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n(1-\alpha)}_{\xrightarrow[n\infty]{}\ 0}$$

Donc, d'après le critère de comparaison dans la convergence des suites numériques réelles, On déduit :

$$\lim_{n\infty}|u_n-\alpha|=0\quad\Longleftrightarrow\quad\lim_{n\infty}(u_n)=\alpha$$

La Question : IV) 1)

Soient $x\,\epsilon\,\mathbb{R}^+$ et $t\,\epsilon\,[x,2x]$,

$$t\,\epsilon\,[x,2x]\ \Longrightarrow\ x\leq t\leq 2x$$
$$\Longrightarrow\ 0\leq x\leq t\leq 2x$$
$$\Longrightarrow\ f(0)\geq f(x)\geq f(t)\geq f(2x)\ ;\ f\searrow\mathbb{R}$$
$$\Longrightarrow\ f(x)\geq f(t)\geq f(2x)\geq 0$$
$$\Longrightarrow\ f(x)\geq f(t)\geq 0$$
$$\Longrightarrow\ \int_x^{2x}\langle f(x)\geq f(t)\geq 0\rangle\,dt$$

J'ai introduit $\int_x^{2x}dt$ car la continuité est vérifiée, et $x<2x$ gardera le sens de l'ordre inchangé.

$$\Longrightarrow\ \int_x^{2x}f(x)\,dt\geq\int_x^{2x}f(t)\,dt\geq\int_x^{2x}0\,dt$$
$$\Longrightarrow\ x\,f(x)\geq F(x)\geq 0\quad(*)$$

$$\lim_{x\to+\infty}x\,f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2}{e^x-1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\frac{e^{2\left(\frac{x}{2}\right)}}{4\left(\frac{x}{2}\right)^2}-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{\left(\frac{x}{2}\right)^2}\right)}\right)$$
$$=\lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=\frac{x}{2}}}\left(\frac{1}{\frac{1}{4}\left(\frac{e^t}{t}\right)^2-\frac{1}{4}\left(\frac{1}{t}\right)^2}\right)$$
$$=\frac{1}{\frac{1}{4}(+\infty)^2-\frac{1}{4}(0)^2}=0$$

Ainsi l'inégalité $(*)$ devient :

$$\underbrace{x\,f(x)}_{\substack{x\to+\infty \\ \searrow \\ 0}} \geq F(x) \geq \underbrace{0}_{\substack{x\to+\infty \\ \searrow \\ 0}}$$

D'où, d'après le critère de comparaison dans la convergence des fonctions, on obtient :

$$\lim_{x\to+\infty} F(x) = 0$$

La Question : IV) 2)

Soient $x \leq 0$ et $t\,\epsilon\,[2x, x]$

$$\begin{aligned} t\,\epsilon\,[2x,x] &\implies 2x \leq t \leq x \\ &\implies t \leq x \\ &\implies f(t) \geq f(x)\ ;\ f\ est\ \searrow sur\ \mathbb{R} \\ &\implies \int_{2x}^{x} f(t)\,dt \geq \int_{2x}^{x} f(x)\,dt\ \ ;\ \ 2x \leq x \\ &\implies -\int_{x}^{2x} f(t)\,dt \geq -x\,f(x) \\ &\implies -F(x) \geq -x\,f(x) \\ &\implies F(x) \leq x\,f(x)\ \ (\star) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} x\,f(x) &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{e^2-1}\right) \\ &= \frac{(-\infty)^2}{e^{-\infty}-1} = \frac{+\infty}{0-1} = -\infty \end{aligned}$$

On obtient ainsi : $F(x) \leq \underbrace{x\,f(x)}_{\substack{x\to-\infty \\ \searrow \\ -\infty}}$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = -\infty$

On multiplie les deux côtés de l'inégalité $(\star)$ par le nombre réel négatif $\left(\frac{1}{x}\right)$ on obtient :

$$\frac{F(x)}{x} \geq \underbrace{f(x)}_{\substack{x\to-\infty \\ \searrow \\ +\infty}}$$

Donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{F(x)}{x} = +\infty$

La Question : IV) 3)

Soit a un nombre réel non nul. f est continue sur $\mathbb{R}$ tout entier. Donc elle admet des primitives sur $\mathbb{R}$. En particulier, f admet une primitive ψ qui s'annule en a et qui est définie par :

$$\begin{cases} \forall\, x\,\epsilon\,\mathbb{R}^+\ ;\ \psi(x) = \int_a^x f(t)\,dt \\ \psi(a) = 0 \end{cases}$$

C'est clair que ψ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.
Et $(\forall x\epsilon\mathbb{R}^+)\ ;\ \psi'(x) = f(x)$.

$$\begin{aligned} \text{Ainsi : } F(x) &= \int_x^{2x} f(t)\,dt \\ &= \int_x^a f(t)\,dt + \int_a^{2x} f(t)\,dt \\ &= -\int_a^x f(t)\,dt + \int_a^{2x} f(t)\,dt \\ &= -\psi(x) + \psi(2x) \end{aligned}$$

f est évidemment dérivable sur $\mathbb{R}^+$ comme étant différence de deux compositions dérivables sur $\mathbb{R}^+$

$$F(x) = \psi(2x) - \psi(x)\ ;\ \forall x\epsilon\mathbb{R}^+$$

$$\begin{aligned} \implies F'(x) &= 2\psi'(2x) - \psi'(x)\ ;\ \forall x\epsilon\mathbb{R}^+ \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= 2\left(\frac{2x}{e^{2x}-1}\right) - \frac{x}{e^x-1} \\ &= \frac{4x}{(e^x-1)(e^x+1)} - \frac{x(e^x+1)}{(e^x-1)(e^x+1)} \\ &= \frac{4x - x\,e^x - x}{e^{2x}-1} \\ &= \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} \end{aligned}$$

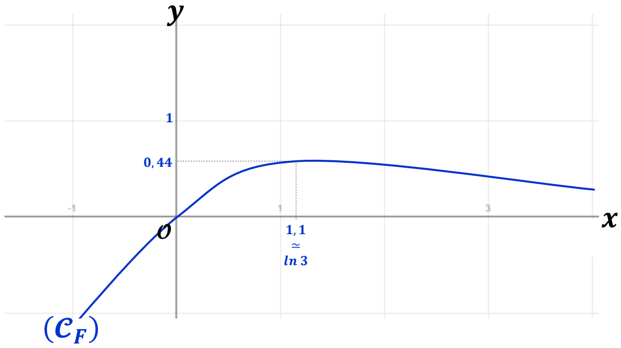
Voyons d'abord est-ce que F est dérivable en 0

$$\begin{aligned} \lim_{x\to0} F'(x) &= \lim_{x\to0}\left(\frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}\right) \\ &= \lim_{x\to0} \frac{1}{\left(\frac{e^{2x}-e^0}{2x-0}\right)} \cdot \left(\frac{3-e^x}{2}\right) \\ &= \left(\lim_{\substack{t\to0 \\ t=2x}} \frac{1}{\left(\frac{e^t-e^0}{t-0}\right)}\right) \times \left(\lim_{x\to0}\left(\frac{3-e^x}{2}\right)\right) \\ &= \left(\frac{1}{e^0}\right) \times \left(\frac{3-e^0}{2}\right) \\ &= 1 = F'(0) \end{aligned}$$

Ainsi : $\begin{cases} F'(x) = \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1}\ \ ;\ \ \forall x\epsilon\mathbb{R}^* \\ F'(0) = 1 \end{cases}$

La Question : IV) 4)

x	$-\infty$		0		$\ln 3$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
F	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$0{,}44$	$\searrow$	0



Oujda

Le Premier Exercice

La Question : 1)

$$E = \left\{ M\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ \sqrt{3}MA = 2MM' \right\}$$
$$= \left\{ M\epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ \sqrt{3}|z_A - z_M| = 2|z_{M'} - z_M| \right\}$$
$$= \left\{ M\binom{x}{y}\ \epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ \sqrt{3}\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - x - iy\right| = 2\left|\frac{2}{\sqrt{3}} - x - iy - iy\right| \right\}$$
$$= \left\{ M\binom{x}{y}\ \epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ \sqrt{3}\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - x\right)^2 + y^2} = 2\sqrt{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2} \right\}$$
$$= \left\{ M\binom{x}{y}\ \epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ 3\left(\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - x\right)^2 + y^2\right) = 4\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - x\right)^2 \right\}$$
$$= \left\{ M\ \epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ 3\left(\frac{4}{3} - \frac{4}{\sqrt{3}}x + x^2 + y^2\right) = 4\left(\frac{3}{4} - \sqrt{3}x + x^2\right) \right\}$$
$$= \left\{ M\ \epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ 4 - 4\sqrt{3}x + 3x^2 + 3y^2 = 3 - 4\sqrt{3}x + 4x^2 \right\}$$
$$= \left\{ M\binom{x}{y}\ \epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ -x^2 + 3y^2 = -1 \right\}$$
$$= \left\{ M\binom{x}{y}\ \epsilon\,(\mathcal{P})\ ;\ -x^2 + 3y^2 = -1\ ;\ (x,y)\ \epsilon\ \mathbb{R}^2 \right\}$$

La Question : 2) a)

$$\mathcal{D}_f = \left\{ x\ \epsilon\ \mathbb{R}\ ;\ \frac{x^2-1}{3} \geq 0 \right\}$$
$$= \{ x\ \epsilon\ \mathbb{R}\ ;\ x^2 - 1 \geq 0 \}$$
$$= \{ x\ \epsilon\ \mathbb{R}\ ;\ (x-1)(x+1) \geq 0 \}$$
$$= \{ x\ \epsilon\ \mathbb{R}\ ;\ x\ \epsilon\ ]-\infty,-1]\ ou\ x\ \epsilon\ [1,+\infty[\}$$
$$=]-\infty,-1] \cup [1,+\infty[$$

$soit\ x\ \epsilon\ \mathcal{D}_f\ alors\ -x\ \epsilon\ \mathcal{D}_f$

$$car : \begin{vmatrix} x \leq -1 & \Rightarrow & -x \geq 1 \\ x \geq 1 & \Rightarrow & -x \leq -1 \end{vmatrix}$$

$$f(-x) = \sqrt{\frac{(-x)^2-1}{3}} = \sqrt{\frac{x^2-1}{3}} = f(x)$$

$D'où\ f\ est\ une\ fonction\ paire$

La Question : 2) b)

$$\lim_{x\to1^+}\left(\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\right) = \lim_{x\to1^+}\left(\frac{\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}}{x-1}\right)$$
$$= \lim_{x\to1^+}\left(\frac{1}{x-1}\right)\left(\sqrt{\frac{(x-1)(x+1)}{3}}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to0^+ \\ t=x-1}}\left(\frac{1}{t}\right)\left(\sqrt{\frac{t(t+2)}{3}}\right)$$
$$= \lim_{t\to0^+}\left(\sqrt{\frac{t(t+2)}{3t^2}}\right)$$
$$= \lim_{t\to0^+}\left(\sqrt{\frac{t+2}{3t}}\right)$$
$$= \lim_{t\to0^+}\left(\sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{3t}}\right)$$
$$= \sqrt{\frac{1}{3} + \frac{2}{0^+}}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{3} + \infty} = +\infty \notin \mathbb{R}$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 1 .

La Question : 2) c)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{3}} = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2-1}{3}} = \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{x^2-1}{3x^2}}$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{3} - \frac{1}{3x^2}} = \sqrt{\frac{1}{3} - 0} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}-\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)$$

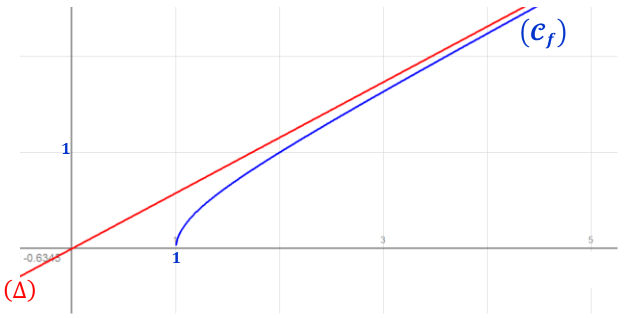
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}-\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}+\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}+\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)}$$

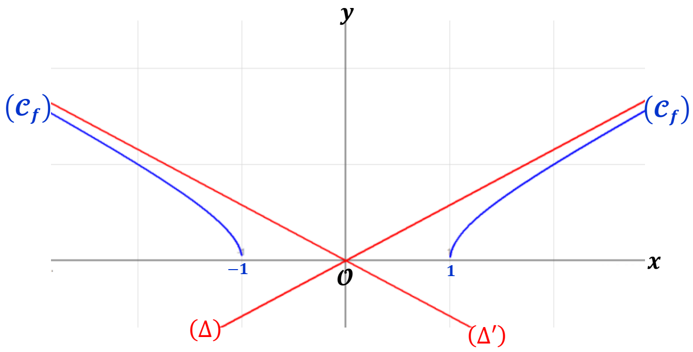
$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(\frac{x^2-1}{3}-\frac{3x}{9}\right)}{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}+\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-1}{3}}{\left(\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}+\frac{\sqrt{3}x}{3}\right)}=\frac{\frac{-1}{3}}{+\infty}=0$$

$$Ainsi\ :\ \begin{cases}\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\dfrac{\sqrt{3}x}{3}\right)=+\infty\end{cases}$$

c-à-d que la droite $(\Delta):y=\frac{\sqrt{3}}{3}x$ est une asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$





La Question : 2) d)

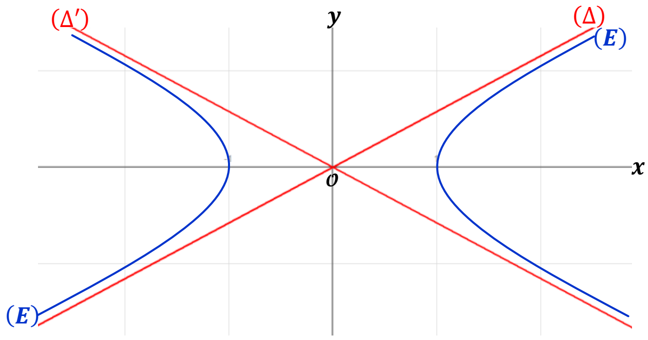
$$E=\{M(x,y)\in(\mathcal{P})\ ;\ x^2-3y^2=1\}$$

$$=\left\{M(x,y)\in(\mathcal{P})\ ;\ y^2=\frac{x^2-1}{3}\right\}$$

$$=\left\{M(x,y)\in(\mathcal{P})\ ;\ y=\pm\sqrt{\frac{x^2-1}{3}}\right\}$$

$$=\left\{M(x,y)\in(\mathcal{P})\ ;\ y=\left|\begin{matrix}oubien\ f(x)\\ oubien\ -f(x)\end{matrix}\right.\right\}$$

$$=(\mathcal{C}_f)\cup(\mathcal{C}_{-f})$$



La Question : 3) a)

Pour simplifier, l'écriture : $\binom{a}{b}\top\binom{c}{d}=\binom{ac+3bd}{ad+bc}$.

et c'est juste pour dire :

$M(a+ib)\top M(c+id)=M\big((ac+3bd)+i(ad+bc)\big)$.

Bien évidemment cette invention aidera à simplifier les notations. Soient $\binom{a}{b},\binom{c}{d}$ et $\binom{e}{f}$ trois éléments du plan complexe,

$$\left(\binom{a}{b}\top\binom{c}{d}\right)\top\binom{e}{f}=\binom{ac+3bd}{ad+bc}\top\binom{e}{f}$$

$$=\binom{e(ac+3bd)+3f(ad+bc)}{f(ac+3bd)+e(ad+bc)}$$

$$=\binom{eac+3bde+3fad+3fbc}{fac+3bdf+ead+ebc}\quad(*)$$

$$d'autre\ part:\ \binom{a}{b}\top\left(\binom{c}{d}\top\binom{e}{f}\right)=\binom{a}{b}\top\binom{ec+3df}{cf+ed}$$

$$=\binom{a(ec+3df)+3b(cf+ed)}{a(cf+ed)+b(ec+3df)}$$

$$=\binom{aec+3dfa+3bcf+3bed}{acf+aed+bec+3dfb}\quad(**)$$

Celui qui jettera un coup d'œil sur $(*)$ et $(**)$ se rendra compte qu'il s'agit bien d'un même point dans le plan complexe

D'où : $\left[\binom{a}{b}\top\binom{c}{d}\right]\top\binom{e}{f}=\binom{a}{b}\top\left[\binom{c}{d}\top\binom{e}{f}\right]$

Donc l'associativité de la loi $\top$ est vérifiée.

La Question : 3) b)

Soient $\binom{a}{b}$ et $\binom{x}{y}$ deux points de E

$$\binom{a}{b}\top\binom{x}{y}=\binom{ax+3by}{ay+bx}$$

$(ax+3bd)^2-3(ay+bx)^2$
$= a^2x^2+9b^2y^2+6axby-3a^2y^2-3b^2x^2-6axby$
$= x^2(a^2-3b^2)-3y^2(a^2-3b^2)$
$= (a^2-3b^2)(x^2-3y^2)$

$$\left(\binom{a}{b},\binom{x}{y}\right) \epsilon E^2 \Leftrightarrow a^2-3b^2=1 \ et\ x^2-3y^2=1$$
$$\Rightarrow (a^2-3b^2)(x^2-3y^2)=1$$
$$\Rightarrow (ax+3bd)^2-3(ay+bx)^2=1$$
$$\Rightarrow \binom{ax+3by}{ay+bx} \epsilon E$$
$$\Rightarrow \binom{a}{b} \top \binom{x}{y} \epsilon E$$

$$Ainsi : \forall\left(\binom{a}{b},\binom{x}{y}\right) \epsilon E^2 \ ; \ \binom{a}{b} \top \binom{x}{y} \epsilon E$$

C-à-d que la loi ⊤ est une loi de composition interne dans E. Autrement-dit, l'ensemble E est stable par la loi ⊤ .

La Question : 3) c)

On a ⊤ est une loi de composition interne dans E et cette loi est associative dans l'ensemble E. pour que E soit un groupe il suffit de vérifier les assertions suivantes : l'admission d'un élément neutre dans E et tout élément de E admet un symetrique dans E.

L'élément neutre :

Soit $\binom{a}{b}$ l'élément neutre de la loi ⊤ dans E .

Alors : $\forall \binom{x}{y} \epsilon E \ ; \ \binom{x}{y} \top \binom{a}{b} = \binom{a}{b} \top \binom{x}{y} = \binom{x}{y}$

$$\binom{x}{y} \top \binom{a}{b} = \binom{x}{y} \Leftrightarrow \binom{ax+3by}{xb+ay} = \binom{x}{y}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} ax+3by=x \\ xb+ay=y \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(a-1)+3by=0 \\ xb+y(a-1)=0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} xb(a-1)+3b^2y=0 \\ xb(a-1)+y(a-1)^2=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3b^2y-y(a-1)^2=0$$
$$\Rightarrow -y(a^2-3b^2)+2ay-y=0$$
$$\Rightarrow -y+2ay-y=0 \ ; \ car\ (a^2-3b^2)=1$$
$$\Rightarrow a=1$$
$$\Rightarrow b=0$$

$$Inversement : \left| \begin{array}{l} \binom{x}{y} \top \binom{1}{0} = \binom{1x+3\times 0\times y}{0x+1y} = \binom{x}{y} \\ \binom{1}{0} \top \binom{x}{y} = \binom{1x+3\times 0\times y}{1y+0x} = \binom{x}{y} \end{array} \right.$$

Ainsi $\binom{1}{0}$ est l'élément neutre de la loi ⊤ dans E .

La symétrie :

Soit $\binom{x}{y}$ un élément de E.

Et soit $\binom{x'}{y'}$ son symétrique dans E.

$$\Rightarrow \binom{x}{y} \top \binom{x'}{y'} = \binom{x'}{y'} \top \binom{x}{y} = \binom{1}{0}$$
$$\Rightarrow \binom{x}{y} \top \binom{x'}{y'} = \binom{1}{0}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} xx'+3yy'=1 \\ xy'+yx'=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} yxx'+3y^2y'=y \\ x^2y'+xyx'=0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 3y^2y'-x^2y'=y$$
$$\Rightarrow -y'(x^2-3y^2)=y$$
$$\Rightarrow -y'=y$$
$$\Rightarrow y'=-y \ ; \ ainsi\ x'=x$$
$$\Rightarrow \binom{x'}{y'} = \binom{x}{-y} \epsilon E \ car\ x^2-3(-y)^2=1$$

Inversement : $\left| \begin{array}{l} \binom{x}{y} \top \binom{x}{-y} = \binom{x^2-3y^2}{-xy+xy} = \binom{1}{0} \\ \binom{x}{-y} \top \binom{x}{y} = \binom{x^2-3y^2}{xy-xy} = \binom{1}{0} \end{array} \right.$

Donc tout élément $\binom{x}{y}$ dans E admet un seul symétrique $\binom{x}{-y}$ dans E.

Finalement : On conclut que $(E,\top)$ est un groupe abélien (commutatif). il est commutatif car la loi ⊤ est commutative dans E.

$$\left[\binom{a}{b} \top \binom{c}{d} = \binom{ac+3bd}{ad+bc} = \binom{c}{d} \top \binom{a}{b}\right]$$

La Question : 1) a)

1ère Méthode : la décomposition en facteurs premiers : les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à 109 sont 2 ,3 ,5 et 7.
Et on remarque que 109 n'est pas divisible par aucun de ces nombres. Alors 109 est un nombre premier. De même, pour $226 = 2 \times 113$, les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à 113 sont 2, 3 , 5 et 7. On remarque que 113 n'est pas divisible par aucun de ces nombres, Alors c'est un nombre premier.
D'où : $226 \wedge 109 = 2 \times 113 \wedge 109 = 1$.
C-à-d que 226 et 109 sont premiers entre eux.

$2^{ème}$ Méthode : l'algorithme d'Euclide

$\begin{array}{|cc|}\hline 226 & 109 \\ 8 & 2 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{226 \wedge 109 = 109 \wedge 8}$

$\begin{array}{|cc|}\hline 109 & 8 \\ 5 & 13 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{109 \wedge 8 = 8 \wedge 5}$

$\begin{array}{|cc|}\hline 8 & 5 \\ 3 & 1 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{8 \wedge 5 = 5 \wedge 3}$

$\begin{array}{|cc|}\hline 5 & 3 \\ 2 & 1 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{5 \wedge 3 = 3 \wedge 2}$

$\begin{array}{|cc|}\hline 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{3 \wedge 2 = 2 \wedge 1}$

$\begin{array}{|cc|}\hline 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{2 \wedge 1 = 1 \wedge 0 = 1}$

D'où $226 \wedge 109 = 1$
c-à-d que 226 et 109 sont premiers entre eux.

Rappel : une équation $ax + by = c$ est résoluble dans $\mathbb{Z}^2$ si et seulement si $(a \wedge b)$ divise le nombre c . On a $226 \wedge 109 = 1$ divise bien le nombre 1 . Alors l'équation $109x - 226y = 1$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}^2$

La Question : 1) b)

Revenons à nouveau à ce mouton qui est l'algorithme d'Euclide pour détecter une solution particulière de l'équation (E)

$\begin{array}{|cc|}\hline 226 & 109 \\ 8 & 2 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{8 = 226 - 2 \times 109} \rightsquigarrow (1)$

$\begin{array}{|cc|}\hline 109 & 8 \\ 5 & 13 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{5 = 109 - 13 \times 8} \rightsquigarrow (2)$

$\begin{array}{|cc|}\hline 8 & 5 \\ 3 & 1 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{3 = 8 - 5 \times 1} \rightsquigarrow (3)$

$\begin{array}{|cc|}\hline 5 & 3 \\ 2 & 1 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{2 = 5 - 3 \times 1} \rightsquigarrow (4)$

$\begin{array}{|cc|}\hline 3 & 2 \\ 1 & 1 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow \boxed{1 = 3 - 2 \times 1} \rightsquigarrow (5)$

$\begin{array}{|cc|}\hline 2 & 1 \\ 0 & 2 \\ \hline\end{array} \Longrightarrow I'm\ not\ gonna\ need\ that \rightsquigarrow (6)$

$$\begin{aligned}
(5) \Longrightarrow\ & 1 = 3 - 2 \times 1 \\
\Longrightarrow\ & 1 = 3 - (5 - 3 \times 1) \times 1 \ ;\ selon\ (4) \\
\Longrightarrow\ & 1 = 2 \times 3 - 1 \times 5 \ ;\ Simplification \\
\Longrightarrow\ & 1 = 2 \times (8 - 5) - 5 \ ;\ selon\ (3) \\
\Longrightarrow\ & 1 = 2 \times 8 - 3 \times 5 \ ;\ Simplification \\
\Longrightarrow\ & 1 = 2 \times 8 - 3(109 - 13 \times 8) \ ;\ selon\ (2) \\
\Longrightarrow\ & 1 = 41 \times 8 - 3 \times 109 \ ;\ Simplification \\
\Longrightarrow\ & 1 = 41 \times (226 - 2 \times 109) - 3 \times 109 \ ;\ selon\ (1) \\
\Longrightarrow\ & 1 = 41 \times 226 - 85 \times 109 \ ;\ Simplification \\
\Longrightarrow\ & 109(-85) - 226(-41) = 1 \ ;\ Réorganisation
\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que $(-85, -41)$ est une solution particulière de l'équation (E). Soit (x, y) une solution de (E) et partons du système suivant :

$$\begin{cases} (x, y)\ est\ solution\ de\ (E) \\ (-85, -41)\ est\ solution\ de\ (E) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 109x - 226y = 1 \\ 109(-85) - 226(-41) = 1 \end{cases}$$

On effectue la soustraction entre ces deux égalités on trouve :

$$109(x + 85) - 226(y + 41) = 0$$

$c - à - d$: $109(x + 85) = 226(y + 41) \quad (*)$

D'après $(*)$ on remarque que 109 divise le produit $226(y + 41)$, mais d'après Gauss, 109 et 226 sont premiers entre eux. Alors 109 divise $(y + 41)$. Il existe alors un entier relatif k' tel que $y + 41 = 109k'$. ou encore $y = 109k' - 41$. On remplace dans $(*)$ on trouve $x = 226k' - 85$. un petit changement de variables accomplira la tache, on pose ainsi $k' = k + 1$ On trouve :

$$\begin{cases} x = 226k' - 85 = 226(k + 1) - 85 = \boxed{226k + 141} \\ y = 109k' - 41 = 109(k + 1) - 41 = \boxed{109k + 68} \end{cases}$$

Ainsi, On a pu montrer l'implication directe suivante : Si (x, y) est solution de (E) , Alors elle s'écrit sous la forme $(226k + 141 ; 109k + 68)$.

Inversement,
Montrons que tous les couples de $\mathbb{Z}^2$ qui s'écrivent sous la forme $(226k + 141 ; 109k + 68)$ sont des solutions de l'équation (E) . En effet :

$$\begin{aligned}
109(226k + 141) - 226(109k + 68) &= 24634k + 15369 - 24634k - 15368 \\
&= 15369 - 15368 \\
&= 1
\end{aligned}$$

Finalement : l'ensemble des solutions de l'équation (E) est défini implicitement par :

$$\boldsymbol{S = \{ (226k + 141\ ;\ 109k + 68)\ \epsilon\ \mathbb{Z}^2\ ;\ avec\ k \epsilon \mathbb{Z} \}}$$

La Question : 1) c)

Soit $(d, e) = (141 + 226k\,; 68 + 109k)$; avec $k \epsilon \mathbb{Z}$

$$\begin{cases} d \epsilon \mathbb{N}^* \\ d \leq 226 \end{cases} \Longrightarrow 0 \leq 141 + 226k \leq 226$$

$$\Longrightarrow \frac{-141}{226} \leq k \leq \frac{226 - 141}{226}$$

$$\Longrightarrow -0{,}62 \leq k \leq 0{,}37$$

$$\Longrightarrow k \epsilon \mathbb{N} \cap [-0{,}62\,; 0{,}7]$$

$$\Longrightarrow k \epsilon \{0\}$$

$$\Longrightarrow k = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} d = 141 + 226k = 141 \\ e = 68 + 109k = 68 \end{cases}$$

La Question : 2)

Les nombres premiers dont le carré est inférieur ou égal à 227 sont 2, 3, 5, 7, 11 et 13. On vérifie aisément que 227 n'est pas divisible par aucun de ces nombres premiers. Donc 227 est un nombre premier.

La Question : 3) a)

$A = \{0\,; 1\,; 2\,; \cdots; 226\}$

$$\begin{aligned} f \;:\; A &\longmapsto A \\ a &\longmapsto f(a) \equiv a^{109}[227] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g \;:\; A &\longmapsto A \\ a &\longmapsto g(a) \equiv a^{141}[227] \end{aligned}$$

$g(f(0)) \equiv (f(0))^{141}[227] \equiv (0^{109})^{141}[227] \equiv 0[227]$

D'où : $g(f(0)) = 0$

La Question : 3) b)

Soit a un élément de $A \backslash \{0\}$. On a 227 est un nombre premier, et il est premier avec a.
sinon, on aura : ou bien 227 divisera a qui est plus petit que lui, ou bien a divisera le nombre premier 227 avec $a \neq 227$ ☹. Alors $a \wedge 227 = 1$.
D'où, à l'aide du théorème de Fermat,
On conclut que : $a^{227-1} \equiv 1[227]$.
C-à-d que : $a^{226} \equiv 1[227]$. ☺

La Question : 3) c) Soit a un élément de .

$$\begin{aligned} g(f(a)) &\equiv (f(a))^{141}[227] \\ &\equiv (a^{109})^{141}[227] \\ &\equiv a^{109\times141}[227] \\ &\equiv a^{1+226e}[227] \;;\; selon\ 1)c) \\ &\equiv a(a^{226})^e[227] \\ &\equiv a(1)^e[227] \;;\; selon\ 3)b) \\ &\equiv a[227] \quad \text{D'où : } g(f(a)) = a \end{aligned}$$

De même : $f(g(a)) \equiv (g(a))^{109}[227]$

$$\begin{aligned} &\equiv (a^{141})^{109}[227] \\ &\equiv a^{141\times109}[227] \\ &\equiv a^{1+226e}[227] \;;\; selon\ 1)c) \\ &\equiv a(a^{226})^e[227] \\ &\equiv a(1)^e[227] \;;\; selon\ 3)b) \\ &\equiv a[227] \quad \text{D'où : } f(g(a)) = a \end{aligned}$$

La Question : 3) d)

f et g sont deux bijections de A dans A.
l'une est l'inverse de l'autre.

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

$$I_1 = \int_1^e \underbrace{(x^2)}_{v'} \cdot \underbrace{(\ln x)}_{u}\, dx = [uv]_1^e - \int_1^e v \cdot u'\, dx$$

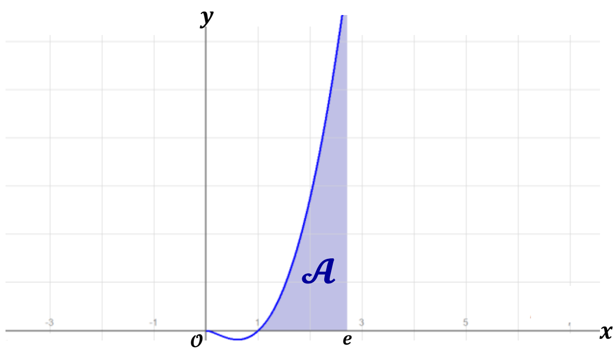
$$= \left[\frac{x^3 \ln x}{3}\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{1}{x}\right) dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_1^e$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{e^3}{3} - \frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}$$

$$= \frac{2e^3 + 1}{9}$$



La Question : 1) b)

$$I_{p+1} = \int_1^e \underbrace{(x^2)}_{v'} \cdot \underbrace{(\ln x)^{p+1}}_{u}\, dx = [uv]_1^e - \int_1^e v \cdot u'\, dx$$

$$= \left[\frac{x^3(\ln x)^{p+1}}{3}\right]_1^e - \int_1^e \left(\frac{x^3}{3}\right)\left(\frac{(p+1)(\ln x)^p}{x}\right) dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3}\right)\int_1^e x^2(\ln x)^p\, dx$$

$$= \frac{e^3}{3} - \left(\frac{p+1}{3}\right) I_p$$

La Question : 1) c)

$$I_2 = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{1+1}{3}\right) I_1 \qquad\qquad I_3 = \frac{e^3}{3} - \left(\frac{2+1}{3}\right) I_2$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{9}e^3 + \frac{1}{9}\right) \qquad\qquad = \frac{e^3}{3} - \frac{5e^3}{27} + \frac{2}{27}$$

$$= \frac{e^3}{3} - \frac{4e^3}{27} - \frac{2}{27} \qquad\qquad = \frac{4e^3+2}{27}$$

$$= \frac{5e^3-2}{27}$$

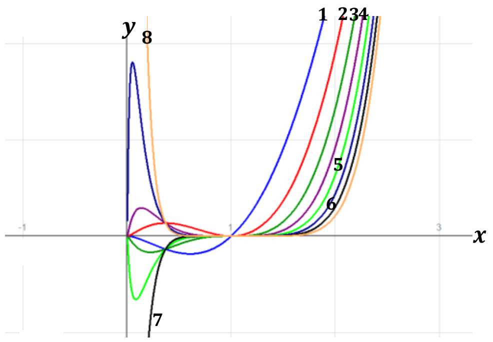
La Question : 2) a)

$$\begin{aligned}
1 \le x \le e \quad &\Longrightarrow \quad 0 \le \ln x \le 1 \\
&\Longrightarrow \quad 0 \le (\ln x)^p \le 1 \;\; ; \;\; p \ge 1 \\
&\Longrightarrow \quad (\ln x)^p(\ln x - 1) \le 0 \\
&\Longrightarrow \quad (\ln x)^{p+1} - (\ln x)^p \le 0 \\
&\Longrightarrow \quad (\ln x)^{p+1} \le (\ln x)^p \\
&\Longrightarrow \quad x^2(\ln x)^{p+1} \le x^2(\ln x)^p \\
&\Longrightarrow \quad \int_1^e x^2(\ln x)^{p+1}\,dx \le \int_1^e x^2(\ln x)^p\,dx
\end{aligned}$$

car $1 < e$ *et la continuité de* $x^2(\ln x)^p$ *est vérifiée*

$$\Longrightarrow \quad I_{p+1} \le I_p \;\; ; \;\; p \ge 0$$

$$\Longrightarrow \quad \textit{la suite } (I_p)_{p\ge1} \textit{ est décroissante}$$



La Question : 2) b)

Soit x un élément de $[1,e]$ $\Longrightarrow$ $1 \le x \le e$

$$\Longrightarrow \quad 0 \le \ln x \le 1$$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{p\infty}(\ln x)^p = 0$$

car c'est une suite géométrique (q^n)
dont la raison q *est inférieure strictement*
à 1 en valeur absolue $|\ln x| < 1$

$$\Longrightarrow \quad \lim_{p\infty} x^2(\ln x)^p = 0$$

On a aussi les fonctions $x^2(\ln x)^p$ sont toutes continues. et cette suite de fonctions converge vers la fonction continue 0 donc :

$$\lim_{p\infty} \int_1^e x^2(\ln x)^p\,dx = \int_1^p \left(\lim_{p\infty} x^2(\ln x)^p\right) dx$$

$$C-\text{à}-d \;:\; \lim_{p\infty}(I_p) = \int_1^e 0\,dx = 0$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\lim_{x\to(-1)^+} g(x) = \lim_{x\to(-1)^+} (1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x))$$

$$= \lim_{\substack{t\to0^+ \\ t=x+1}} \left(1 + \underbrace{(t-1)^2}_{t\to0^+ \;\to\; 1} - 2(t-1)\underbrace{t\ln t}_{t\to0^+ \;\to\; 0}\right) = 2$$

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} (1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x))$$

$$= \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} + 1 - 2\left(\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0} + 1\right)\underbrace{\ln(1+x)}_{\to +\infty}\right)$$

$$\begin{aligned}
&= (+\infty)\big(0 + 1 - 2(0+1)(+\infty)\big) \\
&= (+\infty)(-\infty) \\
&= -\infty
\end{aligned}$$

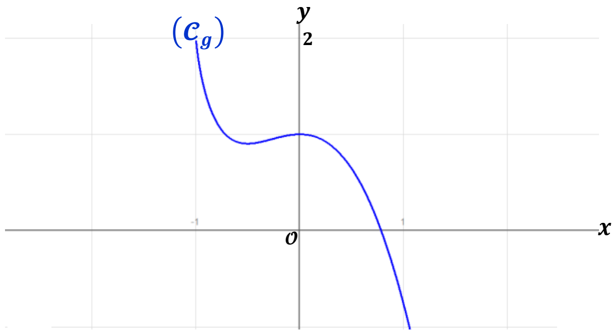
La Question : I) 2)

La fonction g est dérivable sur $]-1,+\infty[$ comme étant une composition de sommes et produits de fonctions usuelles dérivables sur $]-1,+\infty[$.

$$\begin{aligned}
g'(x) &= 2x - \big((2x+2x^2)\ln(1+x)\big)' \\
&= 2x - \left((4x+2)\ln(1+x) + \frac{2x(1+x)}{(1+x)}\right) \\
&= -(4x+2)\ln(1+x)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad -(4x+2)\ln(1+x) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad (4x+2) = 0 \;\; oubien \;\; \ln(1+x) = 0 \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{-1}{2} \quad oubien \quad x = 0
\end{aligned}$$

x	-1		$\frac{-1}{2}$		0		$+\infty$
$4x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$\ln(1+x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
g	2	$\searrow$	$0{,}9$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$



La Question : I) 3)

La fonction g est une bijection de l'intervalle $]0,+\infty[$ dans son image $g(\,]0,+\infty[\,)$ car g est continue et strictement décroissante sur $]0,+\infty[$.
Selon le tableau ci-dessus On a :

$$g(\,]0,+\infty[\,) = \left]\lim_{x\to+\infty} g(x)\ ; g(0)\right[=]-\infty,1[$$

Ainsi g est une bijection de $]0,+\infty[$ dans $]-\infty,1[$.
c-à-d : $\forall\, y \,\epsilon\,]-\infty,1[\ ;\ \exists!\, x \,\epsilon\,]0,+\infty[\ :\ g(x) = y$

Comme 0 est un élément de $]-\infty,1[$.
Alors il existe un seul antécédent α dans $]0,+\infty[$ tel que $g(\alpha)=0$. A l'aide d'un petit calcul,
On aura : $g(1) \simeq -0{,}77\ \ et\ \ g\left(\frac{1}{2}\right) \simeq 0{,}64$.
Et on remarque que $-0{,}77 < 0 < 0{,}64$.
Donc $g^{-1}(0{,}64) < g^{-1}(0) < g^{-1}(-0{,}77)$.
car $g\ \ et\ g^{-1}$ sont toutes décroissantes.
Alors $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

La Deuxième partie

La Question : II) 1)

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to0^+\\ t=x+1}} (\ln t)\left(\frac{1}{t^2-2t+2}\right)$$
$$= (-\infty)\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$= -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right)$$
$$= \lim_{\substack{t\to+\infty\\ t=x+1}} \left(\frac{\ln t}{t^2-2t+2}\right)$$
$$= \lim_{t\to+\infty} \left(\frac{\ln t}{t}\right)\left(\frac{1}{t-2+\frac{2}{t}}\right)$$
$$= 0 \times \left(\frac{1}{+\infty}\right)$$
$$= 0 \times 0 = 0$$

La Question : II) 2) a)

$$f'(x) = \frac{(1+x^2)\left(\frac{1}{1+x}\right) - 2x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{1+x^2-2x(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$$
$$= \frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$$

Etant donné que $(1+x^2)^2 > 0$ toujours,
et $(1+x) > 0\ \ pour\ tout\ \ x\,\epsilon\,]-1,+\infty[$.
Donc : $signe(f'(x)) \equiv signe(g(x))\ \ ;\ \forall\, x\,\epsilon\,]-1,+\infty[$

x	-1		$\frac{-1}{2}$		0		$\frac{1}{2}$		α		1		$+\infty$
$g(x)$		$+$		$+$	1	$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$f'(x)$					$+$				0		$-$		
f	$-\infty$				$\nearrow$				$f(\alpha)$		$\searrow$		0

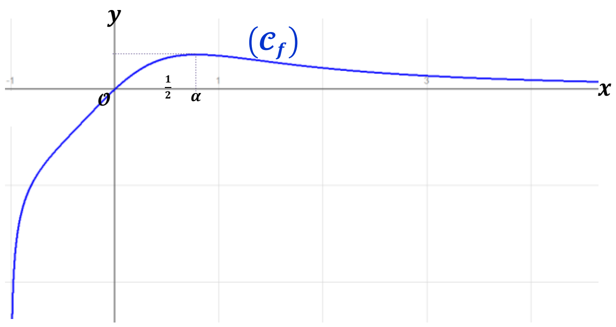
La Question : II) 2) b)

Je sais que $\ g(\alpha) = 0$.
donc : $\ 1+\alpha^2 - 2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha) = 0$
$\Leftrightarrow\ \ 1+\alpha^2 = 2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha)\ \ (\odot)$

$$Ainsi\ \ :\ \ f(\alpha) = \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2} = \frac{\ln(1+\alpha)}{2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha)}$$
$$= \frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$$

La réduction par α est légale ,
car $\ \ln(1+\alpha) \neq 0\ \ .\ (ie\ \ \alpha \neq 0)$

La Question : II) 3)



La Troisième partie

La Question : III) 1)

Pour calculer cette intégrale on aura besoin de la formule trigonométrique suivante :

$$\tan(a-b)=\frac{\tan a-\tan b}{1+\tan a\times \tan b}$$

Par un procédé de changement de variables on pose : $t=\frac{\pi}{4}-x$

$$\left| \begin{array}{l} x=0 \iff t=\frac{\pi}{4} \\ x=\frac{\pi}{4} \iff t=0 \\ dt=-dx \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\ln(1+\tan x)&=\ln\left(1+\tan\left(\frac{\pi}{4}-t\right)\right)\\ &=\ln\left(1+\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)-\tan t}{1+\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\cdot\tan t}\right)\\ &=\ln\left(1+\frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)\\ &=\ln\left(\frac{1+\tan t+1-\tan t}{1+\tan t}\right)\\ &=\ln\left(\frac{2}{1+\tan t}\right)\\ &=\ln 2-\ln(1+\tan t)\end{aligned}$$

Donc : $$\begin{aligned} I&=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,dx\\ &=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}(\ln 2-\ln(1+\tan t))\,(-dt)\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\ln 2-\ln(1+\tan t))\,dt\\ &=\left(\frac{\pi}{4}\right)\ln 2-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,dt\\ &=\left(\frac{\pi}{4}\right)\ln 2-I\end{aligned}$$

$$Ainsi\ :\ I=\frac{\pi\ln 2}{4}-I \iff 2I=\frac{\pi\ln 2}{4}$$
$$\iff I=\frac{\pi\ln 2}{8}$$

La Question : III) 2)

On calcule l'aire $\mathcal{A}$ du Domaine demandé à l'aide de l'intégrale ci-dessous :

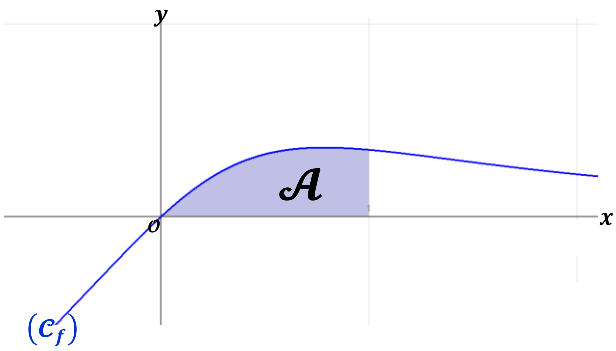
$$\mathcal{A}=\int_0^1\left|\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right|dx=\int_0^1\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right)dx$$

On pose $t=\arctan x \iff \tan t=x$

$$Alors\ :\ \frac{dt}{dx}=\frac{1}{1+x^2} \iff dx=(1+x^2)dt$$

$$\left| \begin{array}{l} x=0 \iff t=0 \\ x=1 \iff t=\frac{\pi}{4} \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned} Ainsi\ :\ \mathcal{A}&=\int_0^1\left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right)dx\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\ln(1+\tan t)}{1+x^2}\right)(1+x^2)dt\\ &=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan t)\,dt\\ &=\left(\frac{\pi\ln 2}{8}\right)\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|\\ &=\left(\frac{\pi\ln 2}{8}\right)cm^2\end{aligned}$$



MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION ORDINAIRE : JUIN 2018

PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
PROF DE MATHS AU COLLÈGE CADI AYAD
OUARZAZATE

Le Premier Exercice

La Question : 1)

Il est clair que E est une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme $M(x,y)$ explicitée dans l'énoncé. E est non vide parce qu'on peut exhiber au moins un élément de cet ensemble et c'est $\theta = M(0{,}0)$. Soient $M(x,y)$ et $M(x',y')$ deux matrices de E.

$$M(x,y) - M(x',y') = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ y' & x'+2y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x-x' & -2(y-y') \\ y-y' & (x-x')+2(y-y') \end{pmatrix}$$

$$= M(x-x';y-y') \in E$$

Car $(x-x')$ et $(y-y')$ sont deux nombres réels.

conclusion, $(E,+)$ est un sous groupe de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+)$.

La Question : 2) a)

Il est clair que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel d'après le cours. Étant donnés α un réel et $M(x,y)$ et $M(x',y')$ deux matrices de E.

$$\alpha \cdot M(x,y) + M(x',y') = \alpha \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ y' & x'+2y' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha x + x' & -2(\alpha y + y') \\ \alpha y + y' & (\alpha x + x') + 2(\alpha y + y') \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha x + x';\ \alpha y + y') \in E$$

Parce que $(\alpha x + x')$ et $(\alpha y + y')$ sont trivialement deux nombres réels. Alors d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriel on conclut que $(E,+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$

La Question : 2) b)

Soit $M(x,y)$ un élément de E.

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2y \\ y & 2y \end{pmatrix}$$

$$= x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= x.M(1{,}0) + y.M(0{,}1)$$

$$= x.I + y.J$$

Autrement dit, la famille (I,J) engendre l'espace $(E,+,\cdot)$. Si de plus elle est libre, ce serait une base à cet espace. Pour que la famille (I,J) soit libre il suffirait de montrer que la seule combinaison linéaire de ces deux matrices qui soit égale à la matrice nulle est celle (combinaison) dont tous les coefficients sont nuls.

$$\alpha.I + \beta.J = \theta$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha & -2\beta \\ \beta & \alpha+2\beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} et\ \ \alpha = 0 \\ et\ \ \beta = 0 \end{cases}$$

Conclusion : (I,J) est libre Donc c'est une base de E.

Pause Méditation :

« The strong man is not the good wrestler. The strongest among you is the one who controls his anger »

The Prophet Mohamed PBUH

La Question : 3) a)

Il suffit de montrer que : $\forall\, M,N \in E \;\; ; \;\; M \times N \in E$

$$M \times N = M(x,y) \times M(x',y')$$
$$= \begin{pmatrix} x & -2y \\ y & x+2y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & -2y' \\ y' & x'+2y' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} xx'-2yy' & -2(x'y+y'x+2yy') \\ x'y+y'x+2yy' & xx'-2yy'+2(x'y+y'x+2yy') \end{pmatrix}$$
$$= M(xx'-2yy' \; ; \; x'y+y'x+2yy') \in E$$

Car $(xx'-2yy') \in \mathbb{R}$ et $(xy'+yx'+2yy') \in \mathbb{R}$.

Finalement : E est une partie stable de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),\times)$.

La Question : 3) b)

Pour montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif, il suffit de vérifier les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien (commutatif)
- $\times$ est associative dans E.
- $\times$ est distributive par rapport à + dans E.
- $\times$ est commutative dans E.

La première assertion est déjà vérifiée d'après la question 1.

Pour la deuxième assertion, on se donne trois matrices dans E. On utilisera éventuellement le résultat déjà prouvé suivant :
$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'-2yy' \,;\, x'y+y'x+2yy')$

D'une part On a :

$$M(x,y) \times \big(M(x',y') \times M(x",y")\big)$$
$$= M(x,y) \times M(x'x\text{-}2y'y; xy'+yx'+2y'y")$$
$$= M(xx'x\text{-}2xy'y - 2y(xy'+yx'+2y'y") \; ; \; x(xy'+yx'+2y'y") + y(x'x"-2y'y") + 2y(xy'+yx'+2y'y")$$

D'autre part On retrouve le même résultat en calculant $(M(x,y) \times M(x',y')) \times M(x",y")$.

On peut même déduire l'associativité de $\times$ du fait que E est une partie stable de l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$

Pour la troisième assertion, On se donne trois matrices de E et on utilisera éventuellement les formules déjà prouvées suivantes :

$$\begin{cases} M(x,y) + M(x',y') = M(x+x' \,;\, y+y') \\ M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'-2yy' ; x'y+y'x+2yy') \end{cases}$$

D'une part :

$$M(x,y) \times \big(M(x',y') + M(x",y")\big)$$
$$= M(x,y) \times M(x'+x" \,;\, y'+y")$$
$$= M\big(x(x'+x") - 2y(y'+y") \;;\; x(y'+y") + y(x'+x") + 2y(y'+y")\big)$$
$$= M(xx'+xx\text{-}2yy'\text{-}2yy \,;\, xy'+xy+yx'+yx + 2yy'+2yy")$$

D'autre part :

$$M(x,y) \times M(x',y') + M(x,y) \times M(x",y")$$
$$= M(xx'-2yy' \;;\; xy'+yx'+2yy') + M(xx"-2yy" \;;\; xy"+yx"+2yy")$$
$$= M(xx'+xx\text{-}2yy'\text{-}2yy \,;\, xy'+xy+yx'+yx + 2yy'+2yy")$$

D'où :

$$M(x,y) \times \big(M(x',y') + M(x",y")\big) = M(x,y) \times M(x',y') + M(x,y) \times M(x",y")$$

c-à-d que la loi $\times$ est distributive à gauche par rapport à la loi +. De la même façon on montre la distributivité à droite.

Pour la 4ième assertion on se donne deux éléments $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de E ;

$$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx'-2yy' \;;\; xy'+x'y+2yy')$$
$$= M(x'x-2y'y \;;\; y'x+yx'+2y'y)$$
$$= M(x',y') \times M(x,y)$$

D'où $\times$ est commutative dans E.

Finalement : $(E,+,\cdot)$ est un anneau commutatif.

La Question : 4) a)

Soit l'application φ définie par :

$$\varphi \;:\; (\mathbb{C}^*,\times) \longmapsto (E,\times)$$
$$(x+iy) \longmapsto \begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix} = M(x+y \;;\; -y)$$

Soient $z = x+iy$ et $z' = x'+iy'$ deux nombres complexes non nuls :

$$\varphi(z \times z') = \varphi\big((x+iy)(x'+iy')\big)$$
$$= \varphi\big((xx'-yy') + i(xy'+x'y)\big)$$
$$= \begin{pmatrix} xx'-yy'+xy'+x'y & 2(xy'+x'y) \\ -xy'-x'y & xx'-yy'-xy'-x'y \end{pmatrix}$$

Or , $\varphi(z) \times \varphi(z')$

$$= \begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x'+y' & 2y' \\ -y' & x'-y' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} xx'-yy'+xy'+x'y & 2xy'+2x'y \\ -xy'-x'y & xx'-yy'-xy'-x'y \end{pmatrix}$$

Ainsi : $\forall\ (z,z') \in \mathbb{C}^{2*}\ ;\ \varphi(z\times z') = \varphi(z)\times\varphi(z')$

c-à-d que φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E,\times)$

La Question : 4) b)

Étant donnée $M(a,b)$ une matrice de E*. Résolvons dans C* l'équation $\varphi(z) = M(a,b)$.

$$\begin{aligned}
\varphi(z) = M(a,b) &\Leftrightarrow \varphi(x+iy) = M(a,b)\\
&\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x-y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2b \\ b & a+2b\end{pmatrix}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = a \\ -y = b\end{cases}\\
&\Leftrightarrow \begin{cases} x = a+b\ ; & qui\ est\ unique\ dans\ \mathbb{R} \\ y = -b\ ; & qui\ est\ unique\ dans\ \mathbb{R}\end{cases}\\
&\Leftrightarrow z = (a+b) - ib\ ;\ qui\ est\ unique\ dans\ \mathbb{C}^*
\end{aligned}$$

D'où l'on conclut la chose suivante :
$\forall\ M(a,b) \in E^*\ ;\ \exists!\, z = (a+b) - ib\ \in \mathbb{C}^*\ :\ \varphi(z) = M(a,b)$
D'où φ est une bijection de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.
L'élément $M(0{,}0)$ est exclu parce qu'il n'est pas inversible par $\times$ dans E. On a pu montrer que φ est un homomorphisme bijectif (isomorphisme)
Alors : $\varphi(\mathbb{C}^*,\times) = (\varphi(\mathbb{C}^*),\times) = (E^*,\times)$

La Question : 4) c)

D'après les questions 4)a) et 4)b) on peut ainsi réclamer que les propriétés du groupe $(E^*,\times)$ seront déduites à partir de celles du groupe déjà connu $(\mathbb{C}^*,\times)$ via l'isomorphisme φ.

Comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre le nombre complexe $(1+i0)$ et tout élément $(x+iy)$ dans $\mathbb{C}^*$ admet un symétrique (inverse) $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$.

Alors $(E^*,\times)$ est aussi un groupe commutatif d'élément neutre la matrice $\varphi(1+0i) = M(1{,}0) = I$ et tout élément $M(x,y) = \varphi(x+y-iy)$ de E* admet un symétrique $Sym(M(x,y))$ dans $(E^*,\times)$ avec :

$$\begin{aligned}
Sym\big(M(x,y)\big) &= Sym\big(\varphi(x+y-iy)\big)\\
&= \varphi\big(Sym(x+y-iy)\big)\\
&= \varphi\left(\frac{x+y}{(x+y)^2+y^2} + i\left(\frac{y}{(x+y)^2+y^2}\right)\right)\\
&= M\left(\frac{x+2y}{(x+y)^2+y^2}\ ;\ \frac{-y}{(x+y)^2+y^2}\right)
\end{aligned}$$

La Question : 5)

Dans cette question on va utiliser la propriété caractéristique des corps, à savoir, il faut vérifier les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien
- $(E^*,\times)$ est un groupe.
- $\times$ est distributive par rapport à +.

Pour la première assertion, c'est déjà fait exactement dans la question 1. La commutativité de + dans E résulte de celle de + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car E est partie stable de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour la deuxième assertion, c'est déjà fait aussi dans la question 4)c).

Pour la distributivité de $\times$ par rapport à + résulte de la distributivité de $\times$ par rapport à + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car E est une partie stable de l'anneau $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$

En conclusion : $(E,+,\times)$ est un corps. et comme $\times$ est commutatif dans E. Alors finalement $(E,+,\times)$ est un corps commutatif.

Le Deuxième Exercice

La Question : 1)

$$\begin{aligned}
x^2 \equiv 1[p] &\Longrightarrow (x^2)^{2k-1} \equiv 1^{2k-1}[p]\ ;\ car\ (2k-1) \in \mathbb{N}^*\\
&\Longrightarrow x^{4k-2} \equiv 1[p]\\
&\Longrightarrow x^{(4k+3)-5} \equiv 1[p]\\
&\Longrightarrow x^{p-5} \equiv 1[p]
\end{aligned}$$

La Question : 2) a)

$$\begin{aligned}
x^{p-5} \equiv 1[p] &\Longrightarrow p/(x^{p-5}-1)\\
&\Longrightarrow (x^{p-5}-1) = kp\ ;\ avec\ k \in \mathbb{N}^*\\
&\Longrightarrow x^{p-5} - kp = 1\\
&\Longrightarrow x\cdot(x^{p-6}) + p\cdot(-k) = 1\\
&\Longrightarrow \exists\ (u,v) \in \mathbb{Z}\ ;\ ux+vp = 1\ ;\ avec\ \left|\begin{array}{l} u = x^{p-6} \in \mathbb{Z} \\ v = -k \in \mathbb{Z} \\ p \geq 7\end{array}\right.\\
&\Longrightarrow x \wedge p = 1\ ;\ D'après\ Bezout
\end{aligned}$$

La Question : 2) b)

$$\begin{aligned}
x^{p-5} \equiv 1\,[p] &\Longrightarrow x\wedge p = 1\ ;\ \text{d'après 2)a)}\\
&\Longrightarrow x^{p-1} \equiv 1\,[p]\ ;\ d'après\ Fermat
\end{aligned}$$

La Question : 2) c)

Trop facile, il suffirait de remplacer $p = 4k+3$ puis conclure.

La Question : 2) d)

$$x^{p-5} \equiv 1[p] \implies (x^{p-5})^k \equiv 1^k[p] \quad ; \quad k \in \mathbb{N}^*$$
$$\implies x^{k(p-5)} \equiv 1[p] \quad ; \quad k \in \mathbb{N}^*$$
$$\implies x^{2+(k-1)(p-1)} \equiv 1[p] \quad ; \quad k \in \mathbb{N}^*$$
$$\implies \boxed{x^2 \cdot x^{(k-1)(p-1)} \equiv 1[p]} \quad : \quad (1)$$

$$x^{p-5} \equiv 1[p] \implies x^{p-1} \equiv 1\,[p] \quad ; \quad selon\ 2)b)$$
$$\implies (x^{p-1})^{k-1} \equiv 1^{k-1}\,[p] \quad ; \quad avec\ k-1 \geq 0$$
$$\implies x^{(p-1)(k-1)} \equiv 1\,[p] \quad ; \quad avec\ k-1 \geq 0$$
$$\implies \boxed{x^2 \cdot x^{(p-1)(k-1)} \equiv x^2\,[p]} \quad : \quad (2)$$

$$(1)\ et\ (2) \implies x^2 \equiv 1\,[p]$$

Finalement : $\boxed{\left.\begin{matrix} x^{p-5} \equiv 1\,[p] \\ p = 4k+3 \\ k \in \mathbb{N}^* \end{matrix}\right| \iff x^2 \equiv 1\,[p]}$

La Question : 3)

Pour résoudre l'équation $x^{62} \equiv 1\,[67]$
on utilise l'équivalence ainsi trouvée :
$x^{p-5} \equiv 1\,[p] \iff x^2 \equiv 1\,[p]$

$$x^{62} \equiv 1\,[67] \iff x^{67-5} \equiv 1\,[67]$$
$$\iff x^2 \equiv 1\,[67]$$
$$\iff 67/(x^2-1)$$
$$\iff 67/(x-1)(x+1)$$
$$\iff \begin{cases} oubien\ 67/(x-1) \\ oubien\ 67/(x+1) \end{cases} ; \quad car\ 67 \in \mathbb{P}$$
$$\iff \begin{cases} oubien\ x-1 = 67k \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ oubien\ x+1 = 67k \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} oubien\ x = 67k+1 \ ; \ k \in \mathbb{Z} \\ oubien\ x = 67k-1 \ ; \ k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Le Troisième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\Delta = (im+2)^2 - 4(im+2-m)$$
$$= (im)^2 + 4im + 4 - 4im - 8 + 4m$$
$$= (im)^2 + 4m - 4$$
$$= (im)^2 - 2(im)(2i) + (2i)^2$$
$$= (im-2i)^2$$

La Question : I) 1) b)

$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{-(im+2)-(im-2i)}{2} = (1-m)i - 1 \\ z_2 = \dfrac{-(im+2)+(im-2i)}{2} = -(1+i) \end{cases}$$

$Remarque :\ Si\ \ \Delta = 0\ \ Alors\ \ z_1 = z_2 = -(1+i)$

La Question : I) 2)

- $z_2 = -(1+i)$

$$= -\left(e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{2}}\right)$$
$$= -2\cos\left(\frac{0-\frac{\pi}{2}}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{0+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}$$
$$= -2\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= -\sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}$$
$$= \left(-\sqrt{2}\right)\left(-e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}\right)$$
$$= \boxed{\sqrt{2} \cdot e^{i\left(\frac{5\pi}{4}\right)}}$$

- $z_1 = (1 - i\sqrt{2})i - 1$

$$= (i-1) + \sqrt{2}$$
$$= \left(e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{i0}\right) + \sqrt{2}$$
$$= 2i \cdot \sin\left(\frac{\frac{\pi}{2}-0}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{2}+0}{2}\right)} + \sqrt{2}$$
$$= 2i \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2}$$
$$= 2i \cdot \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}i \cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} + \sqrt{2}$$
$$= \sqrt{2}\left(1 + ie^{\frac{i\pi}{4}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{2}} \cdot e^{\frac{i\pi}{4}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(e^{i0} + e^{\frac{3i\pi}{4}}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(2\cos\left(\frac{0-\frac{3\pi}{4}}{2}\right) \cdot e^{i\left(\frac{0+\frac{3\pi}{4}}{2}\right)}\right)$$
$$= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{-3\pi}{8}\right) \cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)}$$
$$= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) \cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)}$$

$$Or\ ;\ \cos\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left(2\times\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ 2\cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)-1=\frac{-\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\pm\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}}$$

$$\Leftrightarrow\ \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\ ;\ car\ 0<\frac{3\pi}{8}<\frac{\pi}{2}$$

Finalement :

$$z_1=2\sqrt{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}\right)\cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)}=\sqrt{4-2\sqrt{2}}\cdot e^{\left(\frac{3i\pi}{8}\right)}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\mathcal{R}\left(\frac{-\pi}{2}\right)\ :\ \begin{array}{ccc}(\mathcal{P}) & \mapsto & (\mathcal{P})\\ M(m) & \mapsto & M'(-im-1+i)\end{array}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(M)=M' &\Leftrightarrow (z_{M'}-z_\Omega)=e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_M-z_\Omega)\\ &\Leftrightarrow -im-1+i-z_\Omega=-i(m-z_\Omega)\\ &\Leftrightarrow -im-1+i=-im+i\,z_\Omega+z_\Omega\\ &\Leftrightarrow -im-1+i+im=(i+1)z_\Omega\\ &\Leftrightarrow (-1+i)=(i+1)z_\Omega\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-1+i}{i+1}\right)=z_\Omega\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-1+i}{i+1}\right)\left(\frac{i-1}{i-1}\right)=z_\Omega\\ &\Leftrightarrow \frac{-1+i+i+1}{2}=z_\Omega\\ &\Leftrightarrow \boxed{i=z_\Omega=\omega}\end{aligned}$$

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(B)=A &\Leftrightarrow (z_A-z_\Omega)=e^{\frac{-i\pi}{2}}(z_B-z_\Omega)\\ &\Leftrightarrow -1-i-i=-i(b-i)\\ &\Leftrightarrow 1+2i=ib+1\\ &\Leftrightarrow b=2\end{aligned}$$

La Question : II) 2) a)

$$D'un\ côté\ on\ a\ :\ \frac{(\omega-a)(m-b)}{(\omega-b)}=\frac{(i+1+i)(m-2)}{i-2}$$

$$=\frac{(2i+1)(m-2)(i+2)}{(i-2)(i+2)}$$

$$=\frac{[(i+2)(2i+1)](m-2)}{i^2-2^2}=\frac{(5i)(m-2)}{-5}$$

$$=\boxed{2i-im}$$

$$Or\ ;\ On\ a:\ m'-a=-im-1+i+1+i$$
$$=\boxed{2i-im}$$

$$Donc\ :\ \boxed{\frac{(\omega-a)(m-b)}{(\omega-b)}=(m'-a)}$$

La Question : II) 2) b)

$$\begin{aligned}\begin{array}{c}A,B,\Omega,et\ M\\ sont\ cocycliques\end{array} &\Leftrightarrow \left(\frac{z_M-z_B}{z_\Omega-z_B}\right)\times\left(\frac{z_\Omega-z_A}{z_M-z_A}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_\Omega-z_A}\right)\times\left(\frac{z_\Omega-z_A}{z_M-z_A}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_M-z_A}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \begin{array}{c}A,M,et\ M'\\ sont\ colinéaires\end{array}\end{aligned}$$

$$notez\ que\ d'après\ 2)a)\ on\ a\ eu:$$

$$\boxed{\left(\frac{z_M-z_B}{z_\Omega-z_B}\right)=\left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_\Omega-z_A}\right)}$$

La Question : II) 2) c)

$$\begin{aligned}\begin{array}{c}A,M,et\ M'\\ sont\ colinéaires\end{array} &\Leftrightarrow \left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_M-z_A}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \left(\frac{-im+2i}{m+i+1}\right)\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \frac{-i(x+iy)+2i}{x+iy+i+1}\in\mathbb{R}\ ;\ m=x+iy\\ &\Leftrightarrow \frac{y+i(2-x)}{(x+1)+i(y+1)}\in\mathbb{R}\ ;\ Après\ organisation\\ &\Leftrightarrow \frac{\big(y+i(2-x)\big)\big(x+1-i(y+1)\big)}{(x+1)^2+(y+1)^2}\in\mathbb{R}\\ &\Leftrightarrow \mathcal{I}m\left(\frac{\big(y+i(2-x)\big)\big(x+1-i(y+1)\big)}{(x+1)^2+(y+1)^2}\right)=0\\ &\Leftrightarrow -y(y+1)+(x+1)(2-x)=0\\ &\Leftrightarrow -x^2+x+2-y^2-y=0\\ &\Leftrightarrow x^2-x-2+y^2+y=0\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}=0\\ &\Leftrightarrow \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{10}}{2}\right)^2\\ &\Leftrightarrow (x,y)\in\mathcal{C}\left(I\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{-1}{2}\end{pmatrix};\frac{\sqrt{10}}{2}\right)\end{aligned}$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\int_0^x \left(\frac{t}{1+t}\right) dt = \int_0^x \left(\frac{1+t-1}{1+t}\right) dt$$

$$= \int_0^x \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= \int_0^x 1\, dt - \int_0^x \left(\frac{1}{1+t}\right) dt$$

$$= [t]_0^x - [\,\ln|1+t|\,]_0^x$$

$$= x - \ln|1+x|$$

$$= x - \ln(1+x) \quad ; \quad car\ \ 1+x > 1 > 0$$

La Question : I) 1) b)

$Soient \quad x > 0 \quad et \quad 0 \le t \le x$

$On\ pose \quad u = t^2 \quad Alors \quad t = \sqrt{u}$

$$Aussi : \left| \begin{array}{lcl} t = 0 & \Leftrightarrow & u = 0 \\ t = x & \Leftrightarrow & u = x^2 \end{array} \right.$$

$$Encore \ : \ \frac{du}{dt} = 2t = 2\sqrt{u} \quad \Leftrightarrow \quad dt = \left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right) du$$

$$Alors \ : \ \int_0^x \left(\frac{t}{1+t}\right) dt = \int_0^{x^2} \left(\frac{\sqrt{u}}{1+\sqrt{u}}\right)\left(\frac{1}{2\sqrt{u}}\right) du$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{u}}\right) du$$

La Question : I) 1) c)

$Soit \ \ u \ \ une \ \ variable \ \ muette$

$choisi \ \ a\, priori \ \ dans \ \ [0,x^2] \ \ avec \ \ x > 0$

$$u \,\epsilon\, [0,x^2] \quad \Rightarrow \quad 0 \le u \le x^2$$

$$\Rightarrow \quad 0 \le \sqrt{u} \le x$$

$$\Rightarrow \quad 1 \le 1 + \sqrt{u} \le 1 + x$$

$$\Rightarrow \quad 1 \ge \frac{1}{1+\sqrt{u}} \ge \frac{1}{1+x}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\int_0^{x^2} 1\, du \ge \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1+\sqrt{u}}\right) du \ge \frac{1}{2}\int_0^{x^2} \left(\frac{1}{1+x}\right) du$$

$$J'ai\ introduit \ \ \frac{1}{2}\int_0^{x^2} du \ \ car \ \ la \ continuit\acute{e} \ est \ v\acute{e}rifi\acute{e}e$$

$$Et \ \ parce \ que \ \ 0 < x^2 \ \ comme \ \ 0 < x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}[u]_0^{x^2} \ge \int_0^x \left(\frac{t}{1+t}\right) dt \ge \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{1+x}\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x^2}{2} \ge x - \ln(1+x) \ge \frac{x^2}{2(x+1)}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \ge \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \ge \frac{1}{2(x+1)} \quad ; \quad car\ x^2 > 0$$

La Question : I) 2)

$$Comme \ : \ \frac{1}{2(x+1)} \le \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2(x+1)} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \boxed{\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{2} \xrightarrow[x \to 0^+]{} \boxed{\frac{1}{2}}$$

$Alors,$

$en\, vertu \ \ du \ \ crit\grave{e}re \ \ de \ \ comparaison \ \ on \ \ \acute{e}crit :$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x+1}{x}\right) \ln(1+x)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} (x+1) \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) = 1 \times 1 = 1$$

$$parce\ que \quad \lim_{x\to 0^+} (x+1) = 1$$

$$Et \ : \ \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln(1+x) - \ln(1+0)}{x - 0}\right)$$

$$= (\ln(1+x))'_{/x=0} = \frac{1}{1+0} = 1$$

$$Ainsi \ : \ \lim_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$$

$C - \grave{a} - d \ \ que \ \ f \ \ est \ \ continue \ \ \grave{a} \ \ droite \ \ en \ \ 0$

La Question : II) 1) b)

$$\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x) - 1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{(x+1)\ln(1+x) - x}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x\ln(1+x) + \ln(x+1) - x}{x^2}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln(1+x)}{x}\right) - \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x - \ln(1+x)}{x^2}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = f'_d(0) \,\epsilon\, \mathbb{R}$$

La Question : II) 1) c)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln(1+x)$$
$$= (1+0)\times(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x+1}{x^2}\right)\ln(1+x)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\cdot\ln\left(x\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}\right)\left(\ln x+\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)\right)$$
$$= \lim_{x\to+\infty}\underbrace{\frac{\ln x}{x}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}}+\underbrace{\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}}+\underbrace{\frac{\ln x}{x^2}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}}+\underbrace{\frac{1}{x^2}\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}} = 0$$

D'où la courbe $(\mathcal{C})$ admet une branche parabolique suivant l'axe (OX) au voisinage de $+\infty$.

La Question : II) 2) a)

La fonction $x \longmapsto \frac{x}{x+1}$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant une fraction (quotient) bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $]0,+\infty[$,(sur $\mathbb{R}$ tout entier même). Et le dénominateur est non nul.

La fonction $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant une composition bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivables sur $]0,+\infty[$.

Alors la fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant un produit bien défini de deux fonction toutes les deux dérivables sur $]0,+\infty[$. Soit x un élément de $]0,+\infty[$:

$$f'(x) = \left(\left(\frac{x+1}{x}\right)\ln(1+x)\right)'$$
$$= \left(\frac{x+1}{x}\right)'\ln(1+x)+\left(\frac{x+1}{x}\right)(\ln(1+x))'$$
$$= \left(\frac{-1}{x^2}\right)\ln(1+x)+\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{1}{x+1}\right)$$
$$= \frac{x-\ln(1+x)}{x^2}$$

La Question : II) 2) b)

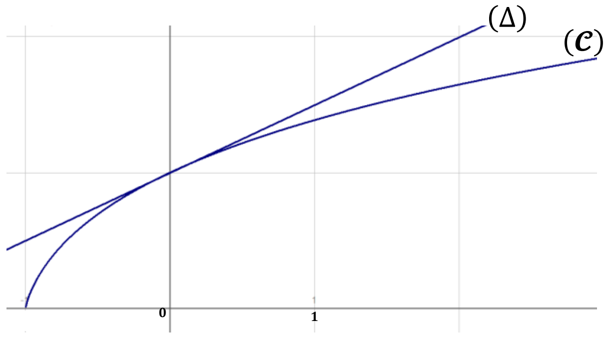
$$Soit\quad x>0 \implies \frac{1}{2(x+1)} \le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$$
$$\implies \frac{1}{2(x+1)} \le f'(x)$$
$$\implies f'(x) \ge \frac{1}{2(x+1)} > 0$$
$$\implies f'(x) > 0$$
$$\implies f \text{ est une fonction strictement } \nearrow \text{ sur }]0,+\infty[$$

La Question : II) 2) c)

La continuité et la croissance de f nous assure l'écriture suivante :

$$f(\,[0,+\infty[\,) = \left[f(0)\,;\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right[= [1\ ;\ +\infty[$$

La Question : II) 3)



La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

$$Soit\quad x>0 \implies \frac{1}{2(x+1)} \le \frac{x-\ln(1+x)}{x^2} \le \frac{1}{2}$$
$$\implies \frac{1}{2(x+1)} \le f'(x) \le \frac{1}{2}$$
$$\implies 0 \le f'(x) \le \frac{1}{2}\ ;\ car\ \frac{1}{2(x+1)} > 0$$

La Question : III) 1) b)

La fonction g est d'abord une fonction dérivable sur $]0,+\infty[$ comme étant une différence de deux fonctions dérivables.
$g'(x) = f'(x) - 1\ ;\ \forall\, x>0$

$$Comme\quad f'(x) \le \frac{1}{2}$$
$$Alors\quad f'(x) - 1 \le \frac{-1}{2} < 0$$
$$C-\grave{a}-d:\quad g'(x) < 0\quad ;\ \forall\, x>0$$

D'où g est strictement décroissante sur l'intervalle $]0,+\infty[$ et en vertu de cette décroissance et de la continuité de g sur $]0,+\infty[$ On écrit :

$$g(\,]0,+\infty[\,) = \Big]\lim_{x\to+\infty} g(x)\ ;\ \lim_{x\to0^+} g(x)\Big[=]-\infty,1[$$

Calculs :

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) - x$$
$$= \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x} - 1\right)$$
$$= (+\infty)(0-1) = -\infty$$

$$\lim_{x\to0^+} g(x) = \lim_{x\to0^+} f(x) - x = f(0) - 0 = 1$$

La Question : III) 1) c)

La fonction g est une bijection de $]0,+\infty[$ vers $]-\infty,1[$ car continue est strictement décroissante . Alors :

$$(\forall\, y \in]-\infty,1[\,)\ (\exists!\, x \in]0,+\infty[\,)\ :\ g(x) = y$$
$$(pour\ 0 \in]-\infty,1[\,)\ (\exists!\, \alpha \in]0,+\infty[\,)\ :\ g(\alpha) = 0$$
$$C-\grave{a}-d\ \ ;\ \ \exists!\, \alpha \in]0,+\infty[\ :\ f(\alpha) = \alpha$$

La Question : III) 2) a)

On raisonne par récurrence sur l'entier naturel n que la propriété $P(n)$: $u_n > 0$ est toujours vraie $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$; $u_0 = a \in]0,+\infty[$ Donc l'instance $P(0)$ est vérifiée. Soit $n\in\mathbb{N}$ fixé tel que $u_n > 0$.

$$\begin{aligned} P(n)\ est\ vraie\ &\Longrightarrow\ u_n > 0 \\ &\Longrightarrow\ f(u_n) > f(0)\ ;\ car\ f\ \nearrow sur[0,+\infty[\\ &\Longrightarrow\ u_{n+1} > 1 \\ &\Longrightarrow\ u_{n+1} > 0\ ;\ car\ 1 > 0 \\ &\Longrightarrow\ P(n+1)\ est\ vraie \end{aligned}$$

$$Ainsi:\ \begin{cases} l'instance\ P(0)\ est\ vraie \\ l'instance\ P(n)\ implique\ P(n+1)\ ;\ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$D'o\grave{u}\ l'on\ conclut\ la\ v\acute{e}racit\acute{e}\ de\ P(n):$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N}\ ;\ u_n > 0$$

Pause Méditation :

« God enjoins you to treat women well, for they are your mothers, daughters, aunts »

The Prophet Mohamed PBUH

La Question : III) 2) b)

La fonction f est une fonction continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ donc l'application du TAF est valable sur n'importe quel intervalle inclus dans $]0,+\infty[$. Soit l'intervalle $[u_n,\alpha]$. avec $[u_n,\alpha] \subset]0,+\infty[$.

$$\begin{cases} f\ cont\ [u_n,\alpha] \\ f\ d\acute{e}riv\ ]u_n,\alpha[\end{cases} \Longrightarrow\ \exists\, c \in]u_n,\alpha[\ ;\ \left(\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right) = f'(c)$$

$$\Longrightarrow\ \left(\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right) = f'(c) \le \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow\ \left|\frac{f(u_n)-f(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| \le \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow\ \frac{|f(u_n)-f(\alpha)|}{|u_n-\alpha|} \le \frac{1}{2}$$
$$\Longrightarrow\ |f(u_n)-f(\alpha)| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|$$
$$\Longrightarrow\ |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha|\ \ ;\ \ \forall n\in\mathbb{N}$$

La Question : III) 2) c)

$$Soit\ \ Q(n)\ :\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|$$

$$Pour\ \ n = 0\ \ ;\ \ |u_0-\alpha| = |a-\alpha|$$

$$Donc\ \ Q(0)\ \ est\ \ vraie$$

$$Soit\ \ n\in\mathbb{N}\ \ fix\acute{e}\ \ et\ supposons\ que\ \ Q(n)\ est\ vraie$$

$$\begin{aligned} Q(n)\ est\ vraie\ &\Longrightarrow\ |u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha| \\ &\Longrightarrow\ |u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{2}|u_n-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a-\alpha| \\ &\Longrightarrow\ |u_{n+1}-\alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |a-\alpha| \\ &\Longrightarrow\ Q(n+1)\ \ est\ \ vraie \end{aligned}$$

$$Ainsi\ \ :\ \ \begin{cases} Q(0)\ est\ \ vraie \\ Q(n)\ \Longrightarrow Q(n+1)\ ;\ \ \forall n\in\mathbb{N} \end{cases}$$

$$Alors\ \ :\ \ \boxed{(\forall n\in\mathbb{N})\ ;\ Q(n)\ est\ \ vraie}$$

Pause Méditation :

« Say : My Lord be merciful to them as they brought me up in my childhood »

To Parents

La Question : III) 2) d)

$$Je\ réclame\ que\ :\ \lim_{n\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$$

Car il s'agit d'une suite géométrique de raison ½ strictement comprise entre -1 *et* 1. En vertu du théorème sur les critères de convergence on en déduit la situation suivante :

$$|u_n-\alpha| \le \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{}\ \boxed{0}}$$

$$Ou\ encore\ :\ \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{}\ \boxed{0}} \le (u_n-\alpha) \le \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |a-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{}\ \boxed{0}}$$

$$D'où\ :\ \lim_{n\infty}(u_n-\alpha)=0$$

$$Ou\ encore\ :\ \lim_{n\infty}(u_n)=\alpha$$

Le Cinquième Exercice

La Question : 1)

On remarque que la fonction $t \longmapsto e^{t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme étant une composition bien définie de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier. Comme $0 \in \mathbb{R}$ alors cette fonction admet une seule primitive F sur $\mathbb{R}$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ \ F(x)=\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt \ \ ;\ F(0)=0 \\ \forall\, x \in \mathbb{R}\ \ ;\ \ F'(x)=e^{x^2} \end{cases}$$

Ainsi F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :
$F'(x)=e^{x^2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$. Rappelez-vous :
La dérivabilité implique la continuité.
On remarque que $\forall x \in \mathbb{R}$; $e^{x^2}>0$.
C-à-d : $F'(x)>0$; $\forall x \in \mathbb{R}$. Donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La Question : 2) a)

Soit $x \in]0,+\infty[$ et soit t une variable muette dans l'intervalle $[0,x]$.

$$t>0 \ \Rightarrow\ t^2>0 \ \Rightarrow\ e^{t^2}>e^0$$

$$\Rightarrow\ e^{t^2}>1$$

$$\Rightarrow\ \int_0^x e^{t^2}\,dt > \int_0^x 1\,dt$$

$$\Rightarrow\ F(x)\ge x \quad ;\ \ \forall\, x>0$$

$$\Rightarrow\ F(x) \ge \underbrace{x}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\ \boxed{+\infty}}$$

$$\Rightarrow\ \lim_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$$

La Question : 2) b)

$$\mathcal{D}_F=\mathbb{R}\ ;\ \ Domaine\ symétrique$$
$$\forall\, x \in \mathbb{R}\ ;\ -x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{aligned} F(-x) &= \int_0^{-x} e^{t^2}\,dt \\ &= \int_0^{-x}\left(e^{u^2}\right)(-du) \ \ ;\ \ t=-u \\ &= -\int_0^{x}\left(e^{u^2}\right)du = -F(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow\ \ F\ est\ une\ fonction\ impaire$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} F(x) &= \lim_{x\to-\infty} F\big(-(-x)\big) \\ &= \lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=-x}} F(-t) \\ &= -\lim_{t\to+\infty} F(t) = -\infty \end{aligned}$$

La Question : 2) c)

F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers $F(\mathbb{R})$ car c'est une fonction continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ Avec :

$$\begin{aligned} F(\mathbb{R}) &= F(\,]-\infty\,;+\infty[\,) \\ &= \Big]\lim_{x\to-\infty} F(x)\ ;\ \lim_{x\to+\infty} F(x)\Big[\\ &=]-\infty\ ;+\infty[= \mathbb{R} \end{aligned}$$

La Question : 2) d)

La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $F'(x)=e^{x^2}$; $\forall x \in \mathbb{R}$. Alors G la fonction réciproque est aussi dérivable et on a :

$$G'(x)=\frac{1}{F'(G(x))}\quad ;\ \ \forall\, x \in \mathbb{R}$$

$$G'(0)=\frac{1}{F'(G(0))}=\frac{1}{F'(0)}=\frac{1}{e^0}=1$$

ROYAUME DU MAROC

9

2ième BAC - SM

2018 R

MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION DE RATTRAPAGE : JUILLET 2018
PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
PROF DE MATHS AU COLLÈGE CADI AYAD
OUARZAZATE

Le Premier Exercice

La Question : 1)

D'abord, E est évidemment une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ puisqu'il s'agit de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 qui s'écrivent sous la forme $M(x,y)$ explicitée dans l'énoncé. E est non vide parce qu'on peut exhiber au moins un élément de cet ensemble et c'est $M(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \theta$

En fait, On peut exhiber dans ce cas simple beaucoup d'éléments puisque la condition sur x et y est large et abondante. Il suffit que x et y soient dans $\mathbb{R}$.

Par suite, On utilise la caractérisation des sous groupes. On se donne deux éléments $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de E, et On souhaite montrer que : $M(x,y) - M(x',y')$ est un élément de E.

$$M(x,y) - M(x',y') = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x - x' & y - y' \\ 0 & x - x' \end{pmatrix} = M(x - x' \;;\; y - y') \in E$$

Parce que $(x - x')$ et $(y - y')$ sont deux nombres réels. Le résultat demandé est établi.

La Question : 2) a)

Il est clair que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel d'après le cours. Etant donnés α un réel et $M(x,y)$ et $M('x',y')$ deux matrices de E.

$$\alpha \cdot M(x,y) + M(x',y') = \alpha \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha x + x' & \alpha y + y' \\ 0 & \alpha x + x' \end{pmatrix}$$
$$= M(\alpha x + x' \;;\; \alpha y + y') \in E$$

Parce que $(\alpha x + x')$ et $(\alpha y + y')$ sont trivialement deux nombres réels. Alors d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriel on conclut que E est sous-espace vectoriel de $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}),+,\cdot)$.

La Question : 2) b)

Soit $M(x,y)$ un élément de E. On remarque que :

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= x \cdot M(1,0) + y \cdot M(0,1)$$

Autrement dit : la famille $(M(1,0) \;;\; M(0,1))$ engendre l'espace E. Si de plus elle est libre, elle serait une base à cette espace et par suite $\dim E$ serait 2.

Pour que la famille $(M(1,0) \;;\; M(0,1))$ soit libre il suffirait de montrer que la seule combinaison linéaire de ces deux matrices qui soit égale à la matrice nulle θ est celle (combinaison) dont tous les coefficients sont nuls.

$$\alpha \cdot M(1,0) + \beta \cdot M(0,1) = \theta$$
$$\Leftrightarrow \quad \alpha \cdot M(1,0) + \beta \cdot M(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} Et\ bien\ \ \alpha = 0 \\ Et\ bien\ \ \beta = 0 \end{cases}$$

En conclusion, $(M(1,0) \;;\; M(0,1))$ est une base de E et $\dim E = 2$.

La Question : 3) a)

Il suffit de montrer que : $\forall A, B \in E \quad ; \quad A \times B \in E$

Soient $A = M(x,y)$ et $B = M(x',y')$ deux matrices de E.

$$\begin{aligned} A \times B &= M(x,y) \times M(x',y') \\ &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x' & y' \\ 0 & x' \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xx' & xy' + x'y \\ 0 & xx' \end{pmatrix} = M(xx' \ ; \ xy' + x'y) \in E \end{aligned}$$

Parce que xx' et $(xy' + x'y)$ sont deux nombres réels. Donc La stabilité de E par rapport à $\times$ est vérifiée.

La Question : 3) b)

Pour montrer que $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif, il suffit de vérifier les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien (commutatif)
- $\times$ est associative dans E .
- $\times$ est distributive par rapport à + dans E
- $\times$ est commutative dans E

La première assertion est déjà vérifiée d'après la question 1.

Pour la deuxième assertion, On se donne trois matrices dans E. On utilisera éventuellement le résultat (déjà prouvé) suivant :
$M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' \ ; \ xy' + x'y)$.

D'une part on commence par :

$$\begin{aligned} M(x,y) \times \big(M(x',y') \times M(x",y")\big) &= M(x,y) \times M\big(x'x" \ ; \ x'y" + y'x"\big) \\ &= M(xx'x" \ ; \ x(x'y" + y'x") + yx'x") \\ &= M(xx'x" \ ; \ xx'y" + xx"y' + x'x"y) \end{aligned}$$

Et d'autre part on remarque que :

$$\begin{aligned} \big(M(x,y) \times M(x',y')\big) \times M(x",y") &= M(xx' \ ; \ xy' + yx') \times M(x",y") \\ &= M(xx'x" \ ; \ xx'y" + x"(xy' + yx')) \\ &= M(xx'x" \ ; \ xx'y" + x"xy' + x'x"y) \end{aligned}$$

Ce qui prouve l'associativité de la loi $\times$ dans E

Pour la troisième assertion, on se donne trois matrices de E et on utilisera éventuellement les formules déjà prouvées suivantes :

$$\begin{cases} M(x,y) + M(x',y') = M(x + x' \ ; \ y + y') \\ M(x,y) + M(x',y') = M(xx' \ ; \ xy' + yx') \end{cases}$$

D'une part, on a :

$$\begin{aligned} M(x,y) \times \big(M(x',y') + M(x",y")\big) &= M(x,y) \times M(x' + x" \ ; \ y' + y") \\ &= M\big(x(x' + x") \ ; \ x(y' + y") + y(x' + x")\big) \\ &= M(xx' + xx" \ ; \ xy' + xy" + x'y + x"y) \end{aligned}$$

Et d'autre part on a :

$$\begin{aligned} M(x,y) \times M(x',y') + M(x,y) \times M(x",y") &= M(xx' \ ; \ xy' + x'y) + M(xx" \ ; \ xy" + x"y) \\ &= M(xx' + xx" \ ; \ xy' + x'y + xy" + yx") \end{aligned}$$

D'où l'on déduit la distributivité de $\times$ par rapport à + dans E.

Pour la 4ième assertion, On se donne deux éléments $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de E :

$$\begin{aligned} M(x,y) \times M(x',y') &= M(xx' \ ; \ xy' + x'y) \\ &= M(x'x \ ; \ yx' + y'x) \\ &= M(x',y') \times M(x,y) \end{aligned}$$

Donc $\times$ est commutative dans E.

Finalement : $(E,+,\times)$ est un anneau commutatif

La Question : 4) a)

Pour montrer la stabilité de E par rapport à T, On se donne deux éléments $M(x,y)$ et $M(x',y')$ de E. et on utilisera éventuellement les formules :

$$\begin{cases} M(x,y) - M(x',y') = M(x - x' \ ; \ y - y') \\ M(x,y) \times M(x',y') = M(xx' \ ; \ xy' + x'y) \end{cases}$$

$$\begin{aligned} M(x,y) \top M(x',y') &= M(x,y) \times M(x',y') - M(y,0) \times M(y',0) \\ &= M(xx' \ ; \ xy' + x'y) - M(yy',0) \\ &= M(xx' + yy' \ ; \ xy' + x'y) \in E \end{aligned}$$

$$car \ : \ \left| \begin{array}{l} (xx' + yy') \in \mathbb{R} \\ (xy' + x'y) \in \mathbb{R} \end{array} \right.$$

Donc T est une loi de composition interne dans l'ensemble E.

Avertissement : Le fait que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et T est une loi de composition interne dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Ceci n'implique jamais que T sera une loi de composition interne dans E.

La Question : 4) b)

Soit φ l'application défini par :

$$\varphi \;:\; (\mathbb{C}^*,\times) \;\mapsto\; (E,\top)$$
$$(x+iy) \;\mapsto\; M(x,y)$$

Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ deux nombres complexes non nuls :

$$\varphi\big((x+iy)\times(x'+iy')\big) = \varphi\big(xx' - yy' + i(xy' + x'y)\big)$$

Signalons que les nombres réels $(xx' - yy')$ et $(xy' + x'y)$ sont non nuls et cela à partir du moment que au moins x ou y le soit. et aussi pour x' et y'. ainsi :

$$\varphi\big((xx' - yy') + i(xy' + x'y)\big) = M(xx' - yy' \;;\; xy' + x'y)$$

$$\begin{aligned} Or,\;\; \varphi(z) \top \varphi(z') &= M(x,y) \top M(x',y') \\ &= M(x,y)\times M(x',y') - M(y,0)\times M(y',0) \\ &= M(xx' \;;\; xy' + x'y) - M(yy',0) \\ &= M(xx' - yy' \;;\; xy' + x'y) \\ &= \varphi(z\times z') \end{aligned}$$

En conclusion : φ est un homomorphisme.

La Question : 4) c)

Etant donnée $M(a,b)$ une matrice de E^*. Résolvons dans $\mathbb{C}^*$ l'équation $\varphi(z) = M(a,b)$

$$\begin{aligned} \varphi(z) = M(a,b) &\iff \varphi(x+iy) = M(a,b) \\ &\iff M(x,y) = M(a,b) \\ &\iff \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} x = a \\ y = b \end{cases} \\ &\iff z = a + ib \end{aligned}$$

D'où l'on conclut la chose suivante :
$\forall\, M(a,b) \in E^*,\; \exists!\, z = a + ib \in \mathbb{C}^* \;:\; \varphi(z) = M(a,b)$
D'où φ est bijective de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\top)$.
l'élément $M(0,0)$ est exclu pour φ car il n'est pas inversible par la loi T.

Ainsi, les propriétés du groupe $(E^*,\top)$ seront déduites à partir de celles du groupe déjà connu $(\mathbb{C}^*,\times)$ via l'isomorphisme de groupes φ.

<u>**Comme**</u> $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe commutatif d'élément neutre le nombre complexe $(1+0i)$ et comme tout élément $(x+iy)$ de $\mathbb{C}^*$ admet un symétrique (inverse) $\left(\frac{x}{x^2+y^2}\right) - i\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)$ dans $(\mathbb{C}^*,\times)$

<u>**Alors**</u> $(E^*,\top)$ est aussi un groupe commutatif d'élément neutre la matrice $\varphi(1+i0) = M(1,0)$. et tout élément $M(x,y)$ de E^* admet un symétrique $M\left(\frac{x}{x^2+y^2} \;;\; \frac{-y}{x^2+y^2}\right)$ dans $(E^*,\top)$.

La Question : 5) a)

On se donne trois matrices de E et On utilise éventuellement les formules :

$$\left|\begin{aligned} &M(x,y) + M(x',y') = M(x+x' \;;\; y+y') \\ &M(x,y) \top M(x',y') = M(xx' - yy' \;;\; xy' + x'y) \end{aligned}\right.$$

D'une part , On commence par calculer :

$$\begin{aligned} &M(x,y) \top \big(M(x',y') + M(x",y")\big) \\ &= M(x,y) \top M(x' + x" \;;\; y' + y") \\ &= M(x(x' + x") - y(y' + y") \;\;;\;\; x(y' + y") + y(x' + x")) \\ &= M(xx' + xx" - yy' - yy" \;\;;\;\; xy' + xy" + yx' + yx") \end{aligned}$$

Et d'autre part on poursuit le calcul par :

$$\begin{aligned} &M(x,y) \top M(x',y') + M(x,y) \top M(x",y") \\ &\quad = M(xx' - yy' \;\;;\;\; xy' + x'y) \\ &\qquad\qquad + M(xx" - yy" \;\;;\;\; xy" + x"y) \\ &= M(xx' + xx" - yy' - yy" \;\;;\;\; xy' + xy" + yx' + yx") \end{aligned}$$

D'où l'on conclut que T est distributive à gauche par rapport à +. On fera pareil pour la distributivité à droite puis on conclura.

La Question : 5) b)

Dans cette question on va utiliser la propriété caractéristique des corps. à savoir il faut vérifier les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien
- $(E^*,\top)$ est un groupe
- T est distributive par rapport à + dans E

Pour la première assertion c'est déjà fait exactement dans la question 1. La commutativité de + dans E résulte de celle de + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ parce que $E \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

Pour la deuxième assertion c'est déjà réalisée aussi dans la question 4)c)

Pour la distributivité de T par rapport à +, elle est récemment établie dans la question 5)a)

On vient de prouver que (E,+,T) est un corps. Et comme T est commutative dans E d'après 4)c). Alors on dira finalement que (E,+,T) est un corps commutatif.

Pause Méditation :

« The Prophet Mohamed (PBUH) was asked :
" which charity is best ? "
He replied : " That which you give while you fear poverty " »

The Prophet Mohamed PBUH

Le Deuxième Exercice

La Question : 1) a)

$$h(z)=z \iff i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)=z$$
$$\iff \left(\frac{z-2i}{z-i}\right)=\frac{z}{i}$$
$$\iff i(z-2i)=z(z-i)\ ;\ notez\ z\neq i$$
$$\iff iz+2=z^2-iz\quad ;\ Développement$$
$$\iff z^2-2iz-2=0\quad ;\ Réorganisation$$

La Question : 1) b)

$$(E)\ :\ z^2-2iz-2=0$$
$$\Delta=(-2i)^2-4\times1\times(-2)=4$$
$$\begin{cases} z_1=\dfrac{-(-2i)-\sqrt{4}}{2\times1}=i-1=b \\ z_1=\dfrac{-(-2i)+\sqrt{4}}{2\times1}=i+1=a \end{cases}$$

La Question : 2) a)

$$\frac{h(z)-a}{h(z)-b}=\frac{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)-a}{i\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)-b}=\frac{\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)+ia}{\left(\frac{z-2i}{z-i}\right)+ib}$$
$$=\frac{\left(\frac{z-2i+i(1+i)(z-i)}{z-i}\right)}{\left(\frac{z-2i+i(-1+i)(z-i)}{z-i}\right)}$$
$$=\frac{z-2i+(i-1)(z-i)}{z-2i-(i+1)(z-i)}$$
$$=\frac{z-2i+iz+1-z+i}{z-2i-iz-1-z+i}$$
$$=\frac{iz-i+1}{-iz-i-1}$$
$$=\frac{i\left(z+\left(\frac{1-i}{i}\right)\right)}{-i\left(z+\left(\frac{i+1}{i}\right)\right)}$$
$$=-\left(\frac{z+\left(\frac{1}{i}-\frac{i}{i}\right)}{z+\left(\frac{i}{i}+\frac{1}{i}\right)}\right)=-\left(\frac{z+(-i-1)}{z+(1-i)}\right)$$
$$=-\left(\frac{z-(i+1)}{z-(-1+i)}\right)=-\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$

La Question : 2) b)

$$A(a)\ ;\ B(b)\ ;\ M(z)\ ;\ M'(h(z))$$

$$\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)=-\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)\equiv\arg\left(-\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)\equiv\arg(-1)+\arg\left(\frac{z-a}{z-b}\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_{M'}-z_A}{z_{M'}-z_B}\right)\equiv\pi+\arg\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \arg\left(\frac{z_A-z_{M'}}{z_B-z_{M'}}\right)\equiv\pi+\arg\left(\frac{z_A-z_M}{z_B-z_M}\right)\ [2\pi]$$
$$\Rightarrow \left(\overline{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right)\equiv\pi+\left(\overline{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right)\ [2\pi]$$

La Question : 3) a)

$$A,B\ et\ M\ sont\ colinéaires \Rightarrow \left(\overline{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right)\equiv0\ [\pi]$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Oubien\ \left(\overline{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right)\equiv0\ [2\pi] \\ Oubien\ \left(\overline{\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}}\right)\equiv\pi\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Oubien\ \left(\overline{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right)\equiv(\pi+0)\ [2\pi] \\ Oubien\ \left(\overline{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right)\equiv(\pi+\pi)\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Oubien\ \left(\overline{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right)\equiv\pi\ [2\pi] \\ Oubien\ \left(\overline{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right)\equiv2\pi\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} Oubien\ \left(\overline{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right)\equiv\pi\ [2\pi] \\ Oubien\ \left(\overline{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right)\equiv0\ [2\pi] \end{cases}$$
$$\Rightarrow \left(\overline{\overrightarrow{M'B},\overrightarrow{M'A}}\right)\equiv0\ [\pi]$$
$$\Rightarrow A,B\ et\ M'\ sont\ colinéaires$$
$$\Rightarrow A,B,M\ et\ M'\ sont\ colinéaires$$

La Question : 3) b)

On suppose maintenant que les points A, B et M ne sont pas colinéaires.

$$\left(\frac{h(z)-a}{h(z)-b}\right)=-\left(\frac{z-a}{z-b}\right)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{a-h(z)}{b-h(z)}\right)\times\left(\frac{b-z}{a-z}\right)=-1\in\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z_A-z_{M'}}{z_B-z_{M'}}\right)\times\left(\frac{z_B-z_M}{z_A-z_M}\right)\in\mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{ou bien } A, B, M \text{ et } M' \text{ sont colinéaires} \\ \text{ou bien } A, B, M \text{ et } M' \text{ sont cocycliques} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{ils sont cocycliques car on a supposé} \\ \text{que } A, B, \text{et } M \text{ ne sont pas colinéaires} \end{array} \right.$$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

Pour le lancer d'une pièce de monnaie équilibrée et non truquée, l'univers des possibilités est $\Omega' = \{P, F\}$

L'expérience en question consiste à répéter le lancer 10 fois. Le résultat (d'obtenir Pile) est représenté par une variable aléatoire de la loi de Bernoulli de paramètre p(Pile)=p(Face)=1/2

La variable aléatoire X en question associe à chaque événement la fréquence d'apparition de Pile dans une série de 10 lancers.

Ainsi les valeurs possibles de X sont $\frac{0}{10}, \frac{1}{10}, \cdots, \frac{10}{10}$
Autrement dit $X(\Omega') = \left\{ \frac{i}{10} \;;\; 0 \leq i \leq 10 \right\}$

Les Questions : 1) b) et 2)

L'événement, $\left[X = \frac{1}{2}\right]$ ou plutôt $\left[X = \frac{5}{10}\right]$, donne une information sur l'obtention de (Pile) exactement 5 fois dans une épreuve de 10 lancers indépendants. Alors la probabilité de vérification de l'événement $\left[X = \frac{5}{10}\right]$ se calcule ainsi :

$$p\left[X = \frac{5}{10}\right] = C_{10}^{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{5} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-5} = \frac{63}{256}$$

$$p\left[X \geq \frac{9}{10}\right] = p\left[X = \frac{9}{10} \;ou\; X = \frac{10}{10}\right]$$

$$= p\left[X = \frac{9}{10}\right] + p\left[X = \frac{10}{10}\right]$$

$$= C_{10}^{9} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{9} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-9} + C_{10}^{10} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{10-10}$$

$$= \frac{11}{1024}$$

Le Quatrième Exercice

La Question : 1) a)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \sqrt{x}(\ln x)^2 = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(\ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^4\right)^2$$

$$= \lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(x^{\frac{1}{4}} \cdot 4 \cdot \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2$$

$$= 16 \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ t = x^{\frac{1}{4}}}} (t \ln t)^2 = 16 \times 0^2 = 0 = f(0)$$

Donc la fonction f est continue à droite en 0.

La Question : 1) b)

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \underbrace{\sqrt{x}}_{\boxed{+\infty}} \cdot \underbrace{(\ln x)^2}_{\boxed{+\infty}} = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\sqrt{x} \cdot (\ln x)^2}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\left(4 \ln\left(x^{\frac{1}{4}}\right)\right)^2}{\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^2}$$

$$= 16 \lim_{\substack{t \to +\infty \\ t = x^{1/4}}} \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 16 \times 0^2 = 0$$

D'où f admet une branche parabolique suivant l'axe (OX).

La Question : 2) a)

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \left(\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}\right) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\sqrt{x}(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{(\ln x)^2}{x^{\frac{1}{2}}}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \left(\frac{4 \ln x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{4}}}\right)^2 = \lim_{\substack{t \to 0^+ \\ t = x^{1/4}}} 16 \left(\frac{\ln t}{t}\right)^2 = 16 \times (-\infty)^2$$

$$= +\infty \notin \mathbb{R}$$

Alors f n'est pas dérivable à droite en 0. L'axe (OY) est une asymptote verticale au voisinage de 0.

La Question : 2) b)

En utilisant les théorèmes généraux de dérivabilités, on dira que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme étant le produit de fonctions toutes dérivables sur $]0, +\infty[$. à savoir $x \longmapsto \sqrt{x}$ et $x \longmapsto \ln x$.
soit $x > 0$:

$$f'(x) = \left(\sqrt{x}\,(\ln x)^2\right)'$$

$$= \left(\sqrt{x}\right)' (\ln x)^2 + ((\ln x)^2)' \sqrt{x}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} (\ln x)^2 + 2 \cdot \frac{1}{x} \cdot \ln x \cdot \sqrt{x}$$

$$= \frac{(4 + \ln x)(\ln x)}{2\sqrt{x}}$$

Pause Méditation :

« Acquire knowledge, it enables its possessor to distinguish right from wrong, it lights the way to heaven, it is our friend in the desert, our society in solitude, our companion when friendless, it guides us to happiness, it sustains us in misery »

The Prophet Mohamed PBUH

La Question : 2) c)

$$\forall x > 0 \;\;;\;\; f'(x) = \frac{(4+\ln x)(\ln x)}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x) = 0 \;\;\Leftrightarrow\;\; x = e^{-4} \;\; ou \;\; x = 1$$

x	0	e^{-4}	1	$+\infty$
$\ln x$	$-$	$-$	$+$	
$4+\ln x$	$-$	$+$	$+$	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
f	$0 \nearrow$	$\left(\frac{4}{e}\right)^2$	$\searrow f(1) \nearrow$	$+\infty$

D'après ce beau tableau, On remarque que f est continue et est strictement croissante sur $[0, e^{-4}]$.
Donc $f \;:\; [0, e^{-4}] \longmapsto f[0, e^{-4}]$ est une bijection.

$C-\grave{a}-d \;\; que \;\;\; f \;:\; [0, e^{-4}] \longmapsto \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$

C-à-d $\forall\, y \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right] \;\;;\;\; \exists!\, x \in [0, e^{-4}] \;:\; f(x) = y$

$$Autrement\ dit \;\;:\;\; \forall\, x \in [0, e^{-4}] \;:\; f(x) \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right] \qquad (*)$$

$$de\ même\ pour\ la\ bijection\ f \;:\; [e^{-4}, 1] \longmapsto \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$$

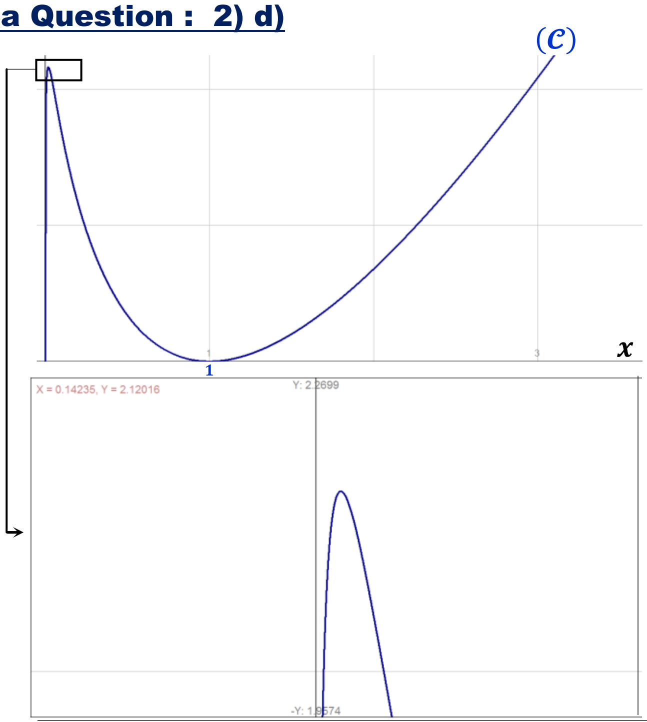
$$Autrement\ dit \;\;:\;\; \forall\, x \in [e^{-4}, 1] \;:\; f(x) \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right] \qquad (**)$$

Finalement, en combinant les résultats $(*)\; et\; (**)$

On conclut que : $\;\; \forall\, x \in [0,1] \;;\; f(x) \in \left[0, \left(\frac{4}{e}\right)^2\right]$

Ou encore : $\;\; \forall\, x \in [0,1] \;;\;\; \boxed{0 \le f(x) \le \left(\frac{4}{e}\right)^2}$

La Question : 2) d)



La Question : 3) a)

On sait déjà que f est continue sur $[0, +\infty[$
et puisque $1 \in [0, +\infty[$ Alors elle admet une seule primitive φ sur $[0, +\infty[$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, x \in [0, +\infty[\;\;:\;\; \varphi(x) = \displaystyle\int_1^x f(t)\, dt \;\;;\;\; \varphi(0) = 0 \\ \forall\, x \in [0, +\infty[\;\;:\;\; \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

$$Ainsi \;\;:\;\; F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt = -\int_1^x f(t)\, dt = -\varphi(x)$$

Comme φ est dérivable sur $[0, +\infty[$ Alors F l'est aussi et On a : $F'(x) = -\varphi'(x) = -f(x) = -\sqrt{x}\,(\ln x)^2$

La Question : 3) b)

On a : $\forall\, x \in [0, +\infty[\;:\; F'(x) = -\sqrt{x}\,(\ln x)^2 < 0$.
Donc F est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

La Question : 4) a)

$$\int_x^1 \sqrt{t} \cdot \ln t\, dt = \int_x^1 \underbrace{t^{1/2}}_{u'(t)} \cdot \underbrace{\ln t}_{v(t)}\, dt$$

$$= \left[\left(\frac{1}{\frac{1}{2}+1}\right) t^{\left(\frac{1}{2}+1\right)} \cdot \ln t\right]_x^1 - \int_x^1 \left(\frac{2}{3} \cdot t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{1}{t}\right) dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \ln t\right]_x^1 - \frac{2}{3}\int_x^1 t^{\frac{1}{2}}\, dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} \cdot \ln t\right]_x^1 - \frac{2}{3}\left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}}\right]_x^1$$

$$= \frac{-2}{3}\, x^{\frac{3}{2}} \cdot \ln t - \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2} - \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$= \frac{-2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} x\sqrt{x}$$

La Question : 4) b)

$$F(x) = \int_x^1 f(t)\, dt = \int_x^1 \sqrt{t}\,(\ln t)^2\, dt$$

$$= \int_x^1 \underbrace{\sqrt{t}}_{\boldsymbol{u'(t)}}\; \underbrace{(\ln t)^2}_{\boldsymbol{v(t)}}\, dt$$

$$= \left[\frac{2}{3} t^{\frac{3}{2}} (\ln t)^2\right]_x^1 - \int_x^1 \left(\frac{2}{3}\, t^{\frac{3}{2}} \cdot \frac{2\ln t}{t}\right) dt$$

$$= \frac{-2}{3} x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 - \frac{4}{3}\int_x^1 \left(t^{\frac{1}{2}} \cdot \ln t\right) dt$$

$$= \frac{-2}{3} x^{\frac{3}{2}} (\ln x)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{-2}{3} x\sqrt{x} \ln x - \frac{4}{9} + \frac{4}{9} x\sqrt{x}\right)$$

$$= \frac{-2}{3} x\sqrt{x} (\ln x)^2 + \frac{8}{9} x\sqrt{x} \ln x + \frac{16}{27} - \frac{16}{27} x\sqrt{x}$$

$$Remarque \ : \ x^{1/2} = \sqrt{x} \quad et \quad x^{3/2} = x\sqrt{x}$$

La Question : 4) c)

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(t)|\, dt = \int_0^1 f(t)\, dt \ ; \ car \ f(x) \geq 0 \ ; \forall x \geq 0$$

$$= F(0) = \lim_{x \to 0^+} F(x)$$

$$= \lim_{x \to 0^+} \frac{-2}{3} x\sqrt{x} (\ln x)^2 + \frac{8}{9} x\sqrt{x} \ln x + \frac{16}{27} - \frac{16}{27} x\sqrt{x}$$

$$= \frac{16}{27}$$

La Question : 5) a)

$$u_n = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\, dt = F\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$n \geq 1 \quad \Longrightarrow \quad 0 \leq \frac{1}{n} \leq 1$$

$$\Longrightarrow \quad F(0) \geq F\left(\frac{1}{n}\right) \geq F(1) \ ; \ car \ \left| \begin{array}{l} F \ est \ \searrow \ sur \ [0, +\infty[\\ et \ 0 \, ; \frac{1}{n} \, ; \, 1 \ \epsilon \ [0, +\infty[\end{array} \right.$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{16}{27} \geq u_n \geq 0 \quad ; \quad car \ F(0) = \frac{16}{27} \quad et \quad F(1) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n \geq 1} \ est \ bornée$$

$$n \geq 0 \quad \Longrightarrow \quad n + 1 > n$$

$$\Longrightarrow \quad \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \quad ; \quad passage \ à \ l'inverse$$

$$\Longrightarrow \quad F\left(\frac{1}{n+1}\right) > F\left(\frac{1}{n}\right) \quad ; \quad car \ F \ est \ \searrow sur \ [0, +\infty[$$

$$\Longrightarrow \quad u_{n+1} > u_n \quad ; \quad \forall \, n \geq 1$$

$$\Longrightarrow \quad (u_n)_{n \geq 1} \ est \ une \ suite \ croissante$$

La Question : 5) b)

On a déjà montré que $(u_n)_{n\geq 1}$ est une suite croissante et est majorée par $\frac{16}{27}$; $car \ \frac{16}{27} \geq u_n \geq 0$
Donc elle est convergente vers une limite réelle.

$$\lim_{n\infty}(u_n) = \lim_{n\infty} F\left(\frac{1}{n}\right) = F\left(\lim_{n\infty} \frac{1}{n}\right) = F(0) = \frac{16}{27}$$

★★★★

ROYAUME DU MAROC

10

2ième BAC - SM MAROC

2017 R

MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION DE RATTRAPAGE : JUILLET 2017

PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
PROF DE MATHS AU COLLÈGE CADI AYAD
OUARZAZATE, le Mercredi 05 juillet 2017

Le Premier Exercice

La Question : 1)

D'abord E est une partie non vide de l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à valeurs réelles, elle est non vide car : $I = M(1{,}0)\ \epsilon\ E$.
Soit $M(a,b)\ et\ M(c,d)$ deux matrices de E et α un nombre réel.

$$\alpha\, M(a,b) + M(c,d) = \alpha \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha a + c & -3(\alpha b + d) \\ \alpha b + d & \alpha a + c \end{pmatrix}$$

$$= M(\alpha a + c\ ;\ \alpha b + d)\ \epsilon\ E$$

Parce que $(\alpha a + c)\ et\ (\alpha b + d)$ sont deux nombres réels. Ainsi E est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), +, \cdot)$

Soit $M(x,y)$ une matrice de E .

$$M(x,y) = \begin{pmatrix} x & -3y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -3y \\ y & 0 \end{pmatrix}$$

$$= x \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= x\, I + y\, J$$

Donc (I, J) est une famille génératrice de E.

Soient $\alpha\ et\ \beta$ deux nombres réels,

$$\alpha\, I + \beta\, J = 0 \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \alpha & -3\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} Et\ bien & \alpha = 0 \\ Et\ bien & \beta = 0 \end{cases}$$

Donc la famille (I, J) est libre. Alors c'est une base de E et on ait $\dim E$ est le nombre d'éléments de (I, J) et c'est 2 . $\boxed{\dim E = 2}$

La Question : 2) a)

On remarque au prime abord que E est une partie non vide de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
Soit $M(a,b)\ et\ M(c,d)$ deux matrices de E :

$$M(a,b) + M(c,d) = \begin{pmatrix} a & -3b \\ b & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c & -3d \\ d & c \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ac - 3bd & -3ad - 3bc \\ bc + ad & -3bd + ac \end{pmatrix}$$

$$= M(ac - 3bd\ ;\ ad + bc)\ \epsilon\ E$$

Car $(ac - 3bd)\ et\ (ad + bc)$ appartiennent à $\mathbb{R}$.

Finalement : E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})\ ; \times)$.

La Question : 2) b)

Pour montrer que $(E, +, \times)$ est un anneau unitaire et commutatif, on vérifie les assertions suivantes :

- $(E, +)$ est un groupe abélien.
- $\times$ est une loi associative.
- $\times$ est distributive par rapport à + dans E.
- $\times$ admet un élément neutre.
- $\times$ est commutative sur E.

La première assertion résulte du fait que $(E, +, \times)$ est un espace vectoriel.

Les assertions 2ème et 3ème résultent du fait que E est une partie stable dans $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}), \times)$ et que $\times$ est associative et distributive par rapport à + dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La 4ème assertion est vérifiée car $I = M(1{,}0)$ est l'élément neutre pour la loi $\times$ dans E.

Pour la dernière assertion, c'est très simple, il suffirait de prendre deux matrices $M(a,b)\ et\ M(c,d)$ et de voir est-ce bien : $M(a,b) \times M(c,d) = M(c,d) \times M(a,b)$

Je vous laisse le soin de réaliser ce petit calcul.

La Question : 3) a)

Soient (a,b) et (c,d) deux couples de $\mathbb{R}_*^2$:

$$\varphi\big((a+ib)\times(c+id)\big) = \varphi\big((ac-bd)+i(ad+bc)\big)$$
$$= M\left(ac-bd\ ;\ \frac{ad+bc}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\varphi(a+ib)\times\varphi(a+ib) = M\left(a\ ;\frac{b}{\sqrt{3}}\right)\times M\left(c\ ;\frac{d}{\sqrt{3}}\right)$$
$$= M\left(ac-3\cdot\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot\frac{d}{\sqrt{3}}\ ;\ a\cdot\frac{d}{\sqrt{3}}+\frac{b}{\sqrt{3}}\cdot c\right)$$
$$= M\left(ac-bd\ ;\ \frac{ad+bc}{\sqrt{3}}\right)$$

Donc φ est un homomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$

Soit $M(a,b)\in E^*$:

$$\varphi(x+iy) = M(a,b) \iff M\left(x\ ;\frac{y}{\sqrt{3}}\right) = M(a,b)$$
$$\iff \begin{cases} x = a \\ \dfrac{y}{\sqrt{3}} = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = a \\ y = b\sqrt{3} \end{cases}$$

C'est-à-dire que l'équation $\varphi(x+iy) = M(a,b)$ admet une seule solution dans $\mathbb{C}^*$. Ou encore : $\forall\, M(a,b)\in E^*\ ;\ \exists!\, z = a+ib\sqrt{3}\in\mathbb{C}^*\ :\ \varphi(z) = M(a,b)$

C-à-d que l'application φ est une bijection de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

Finalement : φ est un isomorphisme de $(\mathbb{C}^*,\times)$ vers $(E^*,\times)$.

La Question : 3) b)

Comme $(\mathbb{C}^*,\times)$ est un groupe abélien et φ est un isomorphisme. Alors $\varphi(\mathbb{C}^*,\times) = (E^*,\times)$ est un groupe abélien aussi.

La Question : 3) c)

$$J^{2017} = \big(M(0,1)\big)^{2017}$$
$$= \left(M\left(0,\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)\right)^{2017}$$
$$= \big(\varphi(0+i\sqrt{3})\big)^{2017}$$
$$= \big(\varphi(i\sqrt{3})\big)^{2017}$$
$$= \varphi(i\sqrt{3})\times\varphi(i\sqrt{3})\times\dots\dots\times\varphi(i\sqrt{3})$$
$$= \varphi\big(i\sqrt{3}\times i\sqrt{3}\times\dots\dots\times i\sqrt{3}\big)\ ;\ 2017\ fois$$
$$= \varphi\left(i^{2017}\times(\sqrt{3})^{2017}\right)$$
$$= \varphi\left(i\times\sqrt{3}\times\left((\sqrt{3})^2\right)^{1008}\right)$$
$$= \boxed{\varphi\left(i\sqrt{3}\cdot 3^{1008}\right)}$$

$$(J^{2017})^{-1} = sym(J^{2017})$$
$$= sym\left(\varphi\left(i\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{1008}\right)\right)$$
$$= \varphi\left(sym\left(i\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{1008}\right)\right)$$
$$= \varphi\left(\frac{1}{i\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{1008}}\right)$$
$$= \varphi\left(\frac{-i}{\sqrt{3}\cdot 3^{1008}}\right)$$
$$= \varphi\left(0-\frac{i}{\sqrt{3}\cdot 3^{1008}}\right)$$
$$= M\left(0\ ;\ \frac{-1}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}\cdot 3^{1008}}\right)$$
$$= \boxed{M\left(0\ ;\ \frac{-1}{3^{1009}}\right)}$$

Finalement : $$\boxed{(J^{2017})^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{3^{1008}} \\ \dfrac{-1}{3^{1009}} & 0 \end{pmatrix}}$$

La Question : 4)

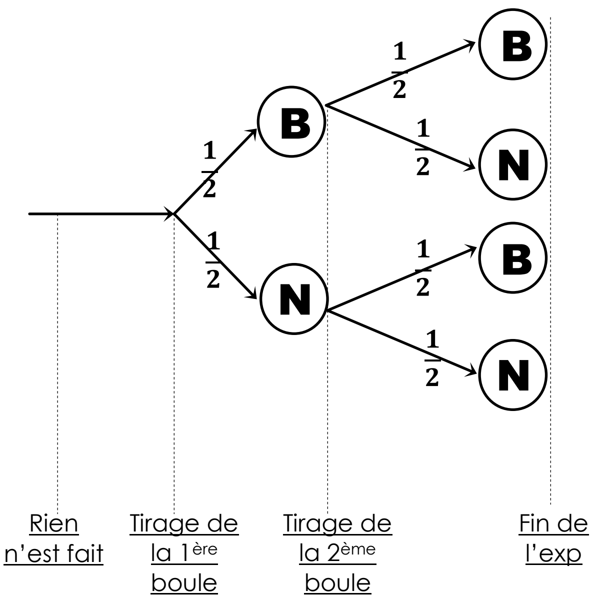
Pour montrer que $(E,+,\times)$ est un corps commutatif, on vérifie aisément les assertions suivantes :

- $(E,+)$ est un groupe abélien.
- $(E^*,\times)$ est un groupe.
- $\times$ est distributive par rapport à $+$.
- $\times$ est commutatif sur E.

Je vous laisse encore le soin de la vérification car on les a déjà montrées.

Le Deuxième Exercice

L'arborescence ci-dessous résume l'expérience aléatoire en question :



La Question : 1)

$$p\binom{gain\ de}{20\ pts} = p(B \cap B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p\binom{perte\ de}{20\ pts} = p(N \cap N) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p\binom{Gain}{nul} = p(BN\ ou\ NB) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

La Question : 2) a)

$$p\binom{gain\ de}{100\ pts} = p\begin{pmatrix} gain\ de \\ 20\ pts \\ 5\ fois \end{pmatrix}$$

$$= C_5^5 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-5} = \frac{1}{1024}$$

La Question : 2) b)

$$p\binom{gain\ de}{40\ pts} = p\begin{pmatrix} gain\ de \\ 20\ pts \\ 2\ fois \end{pmatrix}$$

$$= C_5^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 \times \left(1 - \frac{1}{4}\right)^{5-2} = \frac{270}{1024}$$

La Question : 3) a)

$$X(\Omega) = \{-20\ ;0\ ;\ +20\ \}$$

$$p(X = -20) = p(N \cap N) = \frac{1}{4}$$

$$p(X = 0) = p(BN\ ou\ NB) = \frac{1}{2}$$

$$p(X = +20) = p(B \cap B) = \frac{1}{4}$$

Donc la loi de probabilité de la variable aléatoire X est l'application P_X définie ainsi :

$$P_X \quad : \quad X(\Omega) \longmapsto [0,1]$$

$$\boxed{\begin{array}{rcl} -20 & \longmapsto & 1/4 \\ 0 & \longmapsto & 1/2 \\ +20 & \longmapsto & 1/4 \end{array}}$$

La Question : 3) b)

$$E[X] = \sum_k k \cdot p(X = k)$$

$$= -20 \times \frac{1}{4} + 0 \times \frac{1}{2} + 20 \times \frac{1}{4} = 0$$

Le Troisième Exercice

La Question : 1)

$$\begin{aligned} M = M' \quad &\Leftrightarrow \quad z' = z \\ &\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) = z \\ &\Leftrightarrow \quad z = \frac{1}{z} \\ &\Leftrightarrow \quad z^2 = 1 \\ &\Leftrightarrow \quad \begin{cases} oubien & z = 1 \\ oubien & z = -1 \end{cases} \end{aligned}$$

La Question : 2)

$$\frac{z' + 1}{z' - 1} = \frac{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) + 1}{\frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1}$$

$$= \frac{z + \frac{1}{z} + 2}{z + \frac{1}{z} - 2}$$

$$= \frac{z^2 + 2z + 1}{z^2 - 2z + 1}$$

$$= \frac{(z + 1)^2}{(z - 1)^2}$$

$$= \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^2$$

La Question : 3)

Rappel : La médiatrice d'un segment est l'ensemble des points qui se situent à égale distance des deux extrémités du segment.

$$On\ a \quad : \quad \frac{BM'}{AM'} = \left|\frac{z' + 1}{z' - 1}\right| = \left|\left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^2\right| = \left(\frac{BM}{AM}\right)^2$$

$$\begin{aligned} M \in Médiatrice[AB] \quad &\Rightarrow \quad AM = BM \\ &\Rightarrow \quad \frac{BM}{AM} = 1 \\ &\Rightarrow \quad \left(\frac{BM}{AM}\right)^2 = 1 \\ &\Rightarrow \quad \frac{BM'}{AM'} = 1 \\ &\Rightarrow \quad AM' = BM' \\ &\Rightarrow \quad M' \in Médiatrice[AB] \end{aligned}$$

La Question : 4)

$$M \in (\Gamma) \Rightarrow AMB \text{ est rectangle en } M$$
$$\Rightarrow (AM) \perp (BM)$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right) \in i\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right) \in i\mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z'+1}{z'-1}\right) \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow \left(\frac{z_{M'} - z_B}{z_{M'} - z_A}\right) \in \mathbb{R}$$
$$\Rightarrow (BM') \parallel (AM')$$
$$\Rightarrow \boxed{M' \in (AB)}$$

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

Sur l'intervalle $]0,+\infty[$, est continue comme étant quotient de deux fonctions continues sur l'intervalle $]0,+\infty[$ avec le dénominateur est $\neq 0$.

Étudions maintenant la continuité à droite en 0.

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{Arctan\, x}{x}$$
$$= \lim_{x\to0^+} \left(\frac{Arctan\, x - Arctan\, 0}{x-0}\right)$$
$$= (Arctan\, x)'_{/x=0}$$
$$= \left(\frac{1}{1+x^2}\right)_{/x=0}$$
$$= \frac{1}{1+0^2} = 1 = f(0)$$

Donc f est continue à droite en 0.

Finalement : f est continue sur I.

La Question : I) 2) a)

■ $$t \in [0,x] \Rightarrow 0 \le t \le x$$
$$\Rightarrow 0 \le t^2 \le x^2 \quad ; \quad passage\ au\ carré$$
$$\Rightarrow 1 \le t^2+1 \le x^2+1 \quad ; \quad Ajout\ de\ 1$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \le \frac{1}{t^2+1} \le 1 \quad ; \quad passage\ à\ l'inverse$$

La Question : I) 2) b)

■ $$\frac{1}{x^2+1} \le \frac{1}{t^2+1} \le 1$$
$$\Rightarrow \int_0^x \left(\frac{1}{x^2+1}\right) dt \le \int_0^1 \left(\frac{1}{t^2+1}\right) dt \le \int_0^x 1\, dt$$

Introduction de $\int_0^x dt$ car $0 < x$ et la continuité est vérifiée.

$$\Rightarrow \left[\frac{t}{x^2+1}\right]_0^x \le [Arctan\, t]_0^x \le [t]_0^x$$
$$\Rightarrow \boxed{\frac{x}{x^2+1} \le Arctan\, x \le x}$$

La Question : I) 2) c)

■ $$\frac{x}{x^2+1} \le Arctan\, x \le x$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} \le \frac{Arctan\, x}{x} \le 1 \quad ; \quad x > 0$$
$$\Rightarrow \frac{1}{x^2+1} - 1 \le \frac{Arctan\, x}{x} - 1 \le 0 \quad ; \quad x > 0$$
$$\Rightarrow \frac{-x}{x^2+1} \le \frac{\frac{Arctan\, x}{x} - 1}{x} \le 0 \quad ; \quad x > 0$$
$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{-x}{x^2+1}\right)}_{\xrightarrow{x\to0^+}\ \boxed{0}} \le \left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) \le \underbrace{0}_{\xrightarrow{x\to0^+}\ \boxed{0}}$$
$$\Rightarrow \lim_{x\to0^+} \left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) = 0$$
$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} f \text{ est dérivable à droite en } 0 \\ et \quad f'_d(0) = 0 \end{array}\right.$$

La Question : I) 3) a)

$$f'(x) = \left(\frac{Arctan\, x}{x}\right)'$$

$$= \frac{x\left(\frac{1}{1+x^2}\right) - Arctan\, x}{x^2}$$

$$= \boxed{\frac{1}{x(1+x^2)} - \frac{Arctan\, x}{x^2}}$$

La Question : I) 3) b)

$$Signe(f'(x)) \equiv Signe\left(\frac{x}{1+x^2} - Arctan\, x\right) \equiv (-)$$

$$\Rightarrow \quad \forall\, x \in]0,+\infty[\ ; \ f'(x) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f \ \ est \ \searrow \ sur \ ]0,+\infty[$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

Soients x et t deux éléments de $]0,+\infty[$.

- $\frac{t}{t^2+1} \leq Arctan\, t \leq t$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{t^2+1} \leq \frac{Arctan\, t}{t} \leq 1 \quad ; \quad t > 0$$

$$\Rightarrow \quad \int_0^x \left(\frac{1}{t^2+1}\right) dt \leq \int_0^x \left(\frac{Arctan\, t}{t}\right) dt \leq \int_0^x 1\, dt$$

$$\Rightarrow \quad [Arctan\, t]_0^x \leq \int_0^x f(t)\, dt \leq [t]_0^x$$

$$\Rightarrow \quad Arctan\, x \leq \int_0^x f(t)\, dt \leq x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{Arctan\, x}{x} \leq \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt \leq 1 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \leq g(x) \leq 1 \quad ; \quad x > 0$$

Pour $x = 0$ On remarque que : $1 \leq 1 \leq 1$
C-à-d : $\boxed{f(0) \leq g(0) \leq 1}$ valable aussi.

Finalement : $\boxed{\forall\, x \in [0,+\infty[\ ; \ f(x) \leq g(x) \leq 1}$

La Question : II) 1) b)

- $f(x) \leq g(x) \leq 1$

$$\Rightarrow \quad f(x) - 1 \leq g(x) - 1 \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{f(x)-1}{x} \leq \frac{g(x)-1}{x} \leq 0 \quad ; \quad x > 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\right) \leq \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad f_d'(0) \leq \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) \leq 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{g(x)-g(0)}{x-0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} g \ est \ dérivable \ à \ droite \ en \ 0 \\ g_d'(0) = 0 \end{array} \right.$$

La Question : II) 2) a)

Rappel :

$$\left. \begin{array}{r} f \ cont \ sur \ I \\ a \in I \end{array} \right| \quad \Rightarrow \quad \left| \begin{array}{l} \exists!\, primitive \ \varphi \ sur \ I \\ \forall\, x \in I \ ; \ \varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt \\ \varphi(a) = 0 \\ \forall\, x \in I \ ; \ \varphi'(x) = f(x) \end{array} \right.$$

On a f est continue sur $[0,+\infty[$ et $0 \in [0,+\infty[$
Donc $\exists!$ primitive φ sur $[0,+\infty[$ telle que :

$$\begin{cases} \forall\, x \geq 0 \ ; \ \varphi(x) = \int_0^x f(t)\, dt \ \ et \ \ \varphi(0) = 0 \\ \forall\, x \geq 0 \ : \ \varphi'(x) = f(x) \end{cases}$$

On a : $g(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\, dt = \frac{1}{x}\,\varphi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$

Les fonctions $x \mapsto \varphi(x)$ et $x \mapsto x$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$. Donc g est dérivable aussi.

$$\forall\, x > 0 \quad ; \quad g'(x) = \left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)'$$

$$= \frac{x\,\varphi'(x) - \varphi(x)}{x^2}$$

$$= \frac{x\,f(x) - \varphi(x)}{x^2}$$

$$= \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)$$

$$= \frac{f(x)}{x} - \frac{1}{x}(g(x)) = \frac{1}{x}(f(x) - g(x))$$

La Question : II) 3)

$$x>0 \implies f(x)\le g(x) \;\;;\;\; selon\ \boxed{II}\boxed{1}\boxed{a}$$
$$\implies \big(f(x)-g(x)\big)\le 0$$
$$\implies \frac{1}{x}\big(f(x)-g(x)\big)\le 0$$
$$\implies g'(x)\le 0$$
$$\implies g\ est\ \searrow\ sur\ ]0,+\infty[$$

La Question : II) 4) a)

Soient $x>1$ et $1\le t\le x$.

$$0<Arctan\, t<\frac{\pi}{2} \implies 0<\frac{Arctan\, t}{t}<\frac{\pi}{2t}$$
$$\implies 0<\int_1^x\left(\frac{Arctan\, t}{t}\right)dt<\frac{\pi}{2}[\ln|t|]_1^x$$
$$\implies 0<\int_1^x f(t)\,dt<\frac{\pi\ln x}{2}$$
$$\implies 0<\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt<\frac{\pi}{2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)$$
$$\implies \underbrace{0}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}}<\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt<\underbrace{\frac{\pi}{2}\left(\frac{\ln x}{x}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}}$$
$$\implies \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt=0}$$

$$0\le t\le 1 \implies f(1)\le f(t)\le f(0) \;\;;\;\; car\ \ f\searrow$$
$$\implies \frac{\pi}{4}\le f(t)\le 1$$
$$\implies \frac{\pi}{4}\le\int_0^1 f(t)\,dt\le 1$$
$$\implies \frac{\pi}{4x}\le\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\le\frac{1}{x}$$
$$\implies \underbrace{\boxed{\frac{\pi}{4x}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}}\le\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\le\underbrace{\boxed{\frac{1}{x}}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{}\boxed{0}}$$
$$\implies \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\right)=0$$
$$\implies \lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\,dt\right)$$
$$=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_0^1 f(t)\,dt\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x}\int_1^x f(t)\,dt\right)$$
$$=0+0=\boxed{0}$$

La Troisième partie

La Question : III) 1)

La fonction $\varphi(x)=g(x)-x$ est continue sur $[0,1]$.

$$\left|\begin{array}{l}\varphi(0)=g(0)-0=1>0\\ \varphi(1)=g(1)-1=\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt-1=-1<0\end{array}\right.$$

Ainsi : $\varphi(0)\cdot\varphi(1)<0$

Donc d'après le **TVI** : $\exists\,\alpha\in[0,1]\ ;\ \varphi(\alpha)=0$

Ou encore : $\exists\,\alpha\in[0,1]\ ;\ g(\alpha)=\alpha$

α est unique car φ est strictement décroissante sur $[0,1]$. c'est très facile à démontrer.

La Question : III) 2) a)

$$soit\ x\in[0,+\infty[\implies \frac{x}{x^2+1}\le Arctan\, x\le x$$
$$\implies \frac{1}{x^2+1}\le\frac{Arctan\, x}{x}\le 1$$
$$\implies -1\le\frac{-Arctan\, x}{x}\le\frac{-1}{x^2+1}$$
$$\implies 0\le 1-\frac{Arctan\, x}{x}\le 1-\frac{1}{x^2+1}$$
$$\implies 0\le 1-f(x)\le\frac{x^2}{x^2+1}$$

La Question : III) 2) b)

■ $$0\le 1-f(x)\le\frac{x^2}{x^2+1}$$
$$\implies -1\le -f(x)\le\frac{-1}{x^2+1}$$
$$\implies \frac{1}{x^2+1}\le f(x)\le 1$$
$$\implies \int_0^x\left(\frac{1}{x^2+1}\right)dt\le\int_0^x f(x)\,dt\le\int_0^x 1\,dt$$
$$\implies Arctan\, x\le\int_0^x f(x)\,dt\le x$$
$$\implies f(x)\le\frac{1}{x}\int_0^x f(x)\,dt\le 1$$
$$\implies f(x)\le g(x)\le 1$$
$$\implies 0\le g(x)-f(x)\le\frac{x^2}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \frac{g(x)-f(x)}{x} \leq \frac{x}{1+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad 0 \leq \left(\frac{g(x)-f(x)}{x}\right) \leq \frac{x}{1+x^2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{|g'(x)| \leq \frac{1}{2}}$$

La Question : III) 3) a)

g est une fonction continue et dérivable sur $[\alpha\,;\,u_n]$ donc, d'après le TAF, On conclut que :

$$\left(\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}\right) = g'(c)$$

$$\Rightarrow \quad \left|\frac{g(u_n)-g(\alpha)}{u_n-\alpha}\right| = |g'(x)| \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n-\alpha|$$

La Question : III) 3) b)

Soit $(P_n)\ :\ |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

Pour $n=0$. D'où (P_0) est vraie.
Soit $n \in \mathbb{N}$ fixé et tel que (P_n) soit vraie.

$$(P_n)\ est\ vraie \quad \Rightarrow \quad |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2}\,|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \frac{1}{2}\,|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad |u_{n+1}-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |u_0-\alpha|$$

$$\Rightarrow \quad (P_{n+1})\ est\ vraie$$

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} (P_0)\ vraie \\ (P_n) \Rightarrow (P_{n+1})\ ;\ \forall\, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\forall\, n \in \mathbb{N}\ :\ |u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|}$$

- $|u_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|$

$$\Rightarrow \quad \underbrace{-\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \boxed{0}} \leq (u_n-\alpha) \leq \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n |u_0-\alpha|}_{\xrightarrow[n\infty]{} \boxed{0}}$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n-\alpha) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{n\infty}(u_n) = \alpha$$

$$\Rightarrow \quad u_n\ converge\ vers\ \alpha$$

MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION ORDINAIRE : JUIN 2019
PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
PROF DE MATHS AU COLLÈGE CADI AYAD
OUARZAZATE, le Mardi 18 juin 2019

Le Premier Exercice

La Question : 1) a)

La commutativité :

La commutativité de la loi $*$ sur $\mathbb{C}$ résulte de celle des lois $+$ et $\times$ sur $\mathbb{R}$.
Soient $z = x + iy$ et $z' = a + ib$ deux complexes

$$\begin{aligned} z * z' &= (x+iy) * (a+ib) \\ &= xa + i(x^2b + a^2y) \\ &= ax + i(a^2y + x^2b) \\ &= (a+ib) * (x+ib) = z' * z \end{aligned}$$

Ainsi : $\forall\,(z,z') \in \mathbb{C}^2\ ;\ z * z' = z' * z$

C-à-d : $*$ est une LCI sur $\mathbb{C}$.

La Question : 1) b)

Soient $\left|\begin{array}{l} z = x+iy \\ z' = a+ib \\ z" = m+in \end{array}\right.$ trois nombres complexes.

Dans un premier temps, on remarque que :

$$\begin{aligned} z * (z' * z") &= (x+iy) * \big((a+ib) * (m+in)\big) \\ &= (x+iy) * \big(am + i(a^2n + m^2b)\big) \\ &= xam + i(x^2(a^2n + m^2b) + a^2m^2y) \\ &= \boxed{max + i(na^2x^2 + bx^2m^2 + ya^2m^2)} \quad (*) \end{aligned}$$

Dans un second temps, on a :

$$\begin{aligned} (z * z') * z" &= \big((x+iy) * (a+ib)\big) * (m+in) \\ &= \big(xa + i(x^2b + a^2y)\big) * (m+in) \\ &= xam + i\big(x^2a^2n + m^2(x^2b + a^2y)\big) \\ &= \boxed{max + i(na^2x^2 + bx^2m^2 + ya^2m^2)} \quad (**) \end{aligned}$$

Celui qui jettera un coup d'œil sur $(*)$ et $(**)$ pourrait facilement se rendre compte que l'associativité de la loi $*$ sur $\mathbb{C}$ est évidemment vérifiée :

$$\boxed{\forall\,(z,z',z") \in \mathbb{C}^3\ ;\ z * (z' * z") = (z * z') * z"}$$

La Question : 1) c)

L'élément neutre :

Soit e l'élément neutre (s'il existe) pour la loi $*$ sur l'ensemble $\mathbb{C}$. Alors : $\forall\, z \in \mathbb{C}\ ;\ z * e = e * z = z$

Vous aviez prévu de traiter les deux égalités, mais je me suis restreint à une seule parce que tout simplement la loi $*$ est commutative sur $\mathbb{C}$.

Soient $z = x + iy$ et $e = a + ib$ deux complexes :

$$\begin{aligned} z * e = z &\Leftrightarrow (x+iy) * (a+ib) = (x+iy) \\ &\Leftrightarrow xa + i(x^2b + a^2y) = x + iy \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Et\ bien\ \ xa = x \\ Et\ bien\ \ x^2b + a^2y = y \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Et\ bien\ \ a = 1\ ;\ avec\ \ x \neq 0 \\ Et\ bien\ \ x^2b + y = y\ \ car\ \ a = 1 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} Et\ bien\ \ a = 1 \in \mathbb{R}\ ;\ avec\ x \neq 0 \\ Et\ bien\ \ b = 0 \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} e = 1\ \ est\ \ l'\acute{e}l\acute{e}ment\ neutre \\ pour\ \ la\ \ loi\ * \ \ sur\ \ \mathbb{C}\backslash i\mathbb{R} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit $(iy) \in i\mathbb{R}$, On vérifie que :

$$\begin{aligned} iy * 1 &= (0+iy) * (1+i0) \\ &= 0 + i(0^2 \cdot 0 + 1^2 \cdot y) \\ &= iy \end{aligned}$$

Donc $e = 1$ est aussi l'élément neutre pour la loi $*$ sur la droite imaginaire.

Finalement : La loi $*$ admet un élément neutre sur $\mathbb{C}$ et c'est le nombre entier naturel 1.

Avertissement : Dans cet exercice la lettre e n'est pas le nombre d'Euler $e = 2,718281828459045 \dots\dots$
C-à-d la base du logarithme naturel.
e c'est juste pour dire élément neutre.

La Question : 1) d)

La symétrie :

Soit $z = x + iy$ un nombre complexe.
et soit $z' = a + ib$ son symétrique (s'il existe) pour la loi $*$ sur $\mathbb{C}$. Alors : $z * z' = z' * z = 1$.

A cause de la symétrie, On démunira le travail à une seule égalité.

$$
\begin{aligned}
z * z' = 1 &\iff (x+iy)*(a+ib) = 1 \\
&\iff xa + i(x^2 b + a^2 y) = 1 + i0 \\
&\iff \begin{cases} Et\ bien\quad xa = 1 \\ Et\ bien\quad x^2 b + a^2 y = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} Et\ bien\quad a = \dfrac{1}{x}\ ;\ avec\ x \neq 0 \\ Et\ bien\quad x^2 b + \dfrac{y}{x^2} = 0\ ;\ avec\ x \neq 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} Et\ bien\quad a = \dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}\ ;\ avec\ x \neq 0 \\ Et\ bien\quad b = -\dfrac{y}{x^4} \in \mathbb{R}\ ;\ avec\ x \neq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

$z' = \frac{1}{x} - \frac{y}{x^4} i$ est le seule symétrique de $z = x + iy$ de la loi $*$ sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. C-à-d sur $(\mathbb{R}^* \times \mathbb{R})$.

Autrement dit :

$$\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}\ ;\ \exists!\, z' \in \mathbb{C} \backslash i\mathbb{R}\ :\ \begin{cases} z * z' = 1 \\ z' * z = 1 \end{cases}}$$

La Question : 2) a)

La stabilité de E par la loi $*$ dans $\mathbb{C}$.

$$E = \{ x + iy\ /\ x \in \mathbb{R}_+^*\ et\ y \in \mathbb{R} \}$$

D'abord, il est clair et évident que E est trivialement une partie de $\mathbb{C}$.

Soient $z = x + iy$ et $z' = a + ib$ deux nombres complexes de l'ensemble E.
Alors : $(a, x) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ et $(b, y) \in \mathbb{R}^2$.

$$
\begin{aligned}
z * z' &= (x+iy)*(a+ib) \\
&= xa + i(x^2 b + a^2 y)
\end{aligned}
$$

Comme $a > 0$ et $x > 0$.
Alors : $ax > 0$. Ainsi : $ax \in \mathbb{R}_+^*$

De même, Comme $(a, b, x, y) \in \mathbb{R}^4$
Alors : $(x^2 b + a^2 y) \in \mathbb{R}$ car $+$ et $\times$ sont 2 LCI sur $\mathbb{R}$.

La conclusion : $\boxed{\forall z, z' \in E\ ;\ z * z' \in E}$

C-à-d : que E est stable par $*$ dans $\mathbb{C}$.

La Question : 2) b)

Il suffirait de montrer que $(E, *)$ est un sous-groupe du groupe $(\mathbb{C}, *)$. Et pour cela, On devrait évaluer la véracité des 3 assertions ainsi proposées :

$$\begin{cases} (1)\ :\ (\mathbb{C}, *)\ est\ un\ groupe\ abélien \\ (2)\ :\ E \subseteq \mathbb{C}\ et\ E \neq \emptyset \\ (3)\ :\ \forall (z, t) \in E^2\ ;\ z * sym(t) \in E \end{cases}$$

La première assertion résulte des 4 précédentes.

C-à-d : $\begin{cases} *\ est\ associative\ et\ commutative\ sur\ \mathbb{C} \\ *\ admet\ un\ élément\ neutre\ 1 \\ les\ élément\ de\ \mathbb{C}\ sont\ symétriques\ pour\ * \end{cases}$

Pour la 2ème assertion, On remarque que E est une partie non vide de $\mathbb{C}$ puisqu'il s'agit de nombres complexes dont la partie réelle est strictement positives, et dont on peut trivialement exhiber beaucoup d'éléments de E, à savoir $(1 + 0i)$ $\dots (4 + 3i) \dots .$

Pour la 3ème assertion,
On se donne deux nombres complexes $(z = x + iy)$ et $(t = a + ib)$ avec $x > 0$ et $a > 0$

$$
\begin{aligned}
z * sym(t) &= (x+iy) * sym(a+ib) \\
&= (x+iy) * \left(\frac{1}{a} - i\,\frac{b}{a^4} \right) \\
&= \frac{x}{a} + i \left(x^2 \cdot \left(\frac{-b}{a^4} \right) + \left(\frac{1}{a} \right)^2 \cdot y \right) \\
&= \frac{x}{a} + i \left(\frac{-bx^2}{a^4} + \frac{y}{a^2} \right) \quad \in \quad E
\end{aligned}
$$

$$parce\ que\ \left(\frac{-bx^2}{a^4} + \frac{y}{a^2} \right) \in \mathbb{R}$$

$$Et\ que\ \ \frac{x}{a} > 0 \quad car \quad \left| \begin{matrix} x > 0 \\ a > 0 \end{matrix} \right.$$

La Question : 3)

$$\left| \begin{array}{l} E = \{ x + iy \ ; \ x \in \mathbb{R}_+^* \ et \ y \in \mathbb{R} \} \\ G = \{ 1 + iy \ ; \ y \in \mathbb{R} \} \end{array} \right.$$

D'abord, G est immédiatement une partie non vide de E car :

$$\begin{aligned} z \in G \quad &\Longrightarrow \quad z = 1 + iy \ ; \ y \in \mathbb{R} \\ &\Longrightarrow \quad z = 1 + iy \ ; \ \begin{cases} 1 \in \mathbb{R}_+^* \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Longrightarrow \quad z \in E \end{aligned}$$

Elle est non vide puisqu'on peut exhiber au moins un élément et c'est $1 = 1 + i0 \in G \subset E \subset \mathbb{C}$

Soient maintenant $z = 1 + iy \ et \ h = 1 + it$ deux nombres complexes de l'ensemble G.

$$\begin{aligned} z * sym(h) &= (1 + iy) * \left(\frac{1}{1} - i \frac{t}{1^4} \right) \\ &= (1 + iy) * (1 - it) \\ &= 1 + i(1^2(-t) + 1^2 y) \\ &= 1 + i(y - t) \in G \ ; \ car \ (y - t) \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi, on a pu prouver les postulats suivants :

$$\begin{cases} (1) \ : \ (E,*) \ est \ un \ groupe \ abélien \ déjà \\ (2) \ : \ G \subseteq E \ \ et \ \ G \neq \emptyset \\ (3) \ : \ \forall \, (z,h) \in G^2 \ ; \ z * sym(h) \in G \end{cases}$$

D'où $(G,*)$ est bien un sous-groupe abélien du groupe abélien $(E,*)$ et ceci selon la caractérisation des sous-groupe vue dans le cours.

La Question : 4) a)

D'abord, F est une partie de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ car c'est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 2 à coefficients réels explicitées dans l'énoncé de F.

On se donne deux matrices $M(x,y)$ et $M(a,b)$ de l'ensemble F.

$$\begin{aligned} M(x,y) \times M(a,b) &= \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & x \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} xa & xb + ya \\ 0 & xa \end{pmatrix} \in F \end{aligned}$$

$$parce \ que \ : \ \begin{cases} xa > 0 \ ; \ car \ a > 0 \ et \ x > 0 \\ (xb + ya) \in \mathbb{R} \quad triviale \end{cases}$$

Ainsi : $\boxed{\forall \, M(x,y), M(a,b) \in F \ ; \ M(x,y) \times M(a,b) \in F}$

C-à-d F est une partie stable pour la multiplication matricielle $\times \ dans \ \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

La Question : 4) b)

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ (E,*) \ &\longmapsto \ (F,\times) \\ (x + iy) \ &\longmapsto \ M(x^2, y) \end{aligned}$$

Montrons que φ est un homomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\times)$.

Soient $(x + iy) \ et \ (a + ib)$ deux nombres complexes de E. Dans un premier temps on a :

$$\begin{aligned} \varphi\big((x + iy) * (a + ib)\big) &= \varphi\big(xa + i(x^2 b + a^2 y)\big) \\ &= M\big((xa)^2 \ ; \ x^2 b + a^2 y\big) \end{aligned}$$

Et dans un second temps on ait :

$$\begin{aligned} \varphi(x + iy) \times \varphi(a + ib) &= M(x^2, y) \times M(a^2, b) \\ &= \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a^2 & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x^2 a^2 & x^2 b + y a^2 \\ 0 & x^2 a^2 \end{pmatrix} \\ &= M\big((xa)^2 \ ; \ x^2 b + a^2 y\big) \end{aligned}$$

Ainsi : $\boxed{\forall \, z, z' \in \mathbb{C} \ ; \ \varphi(z * z') = \varphi(z) \times \varphi(z')}$

C-à-d : φ est 1 homomorphisme de $(E,*)$ vers $(F,\times)$.

Pour Montrer la bijectivité de φ, oubien on montre l'injectivité et la surjectivité de φ, oubien on utilise la définition d'une application bijective. À savoir :

$$\begin{aligned} f \ : \ E \ &\longmapsto \ F \\ x \ &\longmapsto \ f(x) = y \end{aligned}$$

$$\boxed{f \ bijective \ \Longleftrightarrow \ (\forall y \in F), (\exists ! \, x \in E) \ : \ f(x) = y}$$

Je propose l'usage de cette 2ème Méthode :

$$\begin{aligned} \varphi \ : \ (E,*) \ &\longmapsto \ (F,\times) \\ (x + iy) \ &\longmapsto \ M(x^2, y) = \varphi(x + iy) \end{aligned}$$

Étant donnée M(a²,b) une matrice de F, existe-t-il un antécédent dans E pour cette matrice oubien il en existe plusieurs via l'application φ. Résolvons alors l'équation $\varphi(x + iy) = M(a^2, b)$ d'inconnu le nombre complexe $x + iy$.

$$\varphi(x+iy) = M(a^2,b) \quad \Leftrightarrow \quad M(x^2,y) = M(a^2,b)$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 & y \\ 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 & b \\ 0 & a^2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Et\ bien\ \ x^2 = a^2 \\ Et\ bien\ \ y = b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien\ \ (x = -a\ \ et\ \ y = b) \\ ou\ bien\ \ (x = a\ \ et\ \ y = b) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} Et\ bien\ \ x = a \\ Et\ bien\ \ y = b \end{cases} \quad ;\ car \ \left| \begin{matrix} x\epsilon\mathbb{R}_+^* \\ a\epsilon\mathbb{R}_+^* \end{matrix} \right.$$

$$\Leftrightarrow (x+iy) = a+ib\ \ unique\ \ dans\ E$$

La conclusion :

$$\boxed{(\forall\ M(a^2,b)\ \epsilon\ F), (\exists!\ z = a+ib\ \epsilon\ E)\ ;\ \ \varphi(z) = M(a^2,b)}$$

C-à-d que φ est bien une bijection de E vers F.

Ainsi : φ est un isomorphisme de $(E,*)$ $vers$ $(F,\times)$.

La Question : 4) c)

Rappel : Si f est un homomorphisme d'un groupe $(G,*)$ vers un ensemble $(F,\top)$, Alors l'image du groupe $(G,*)$ par f est le nouveau groupe $(f(G),\top)$.

Les propriétés caractéristiques du groupe $(f(G),\top)$ seront déduites à partir de celles du groupe $(G,*)$ via l'application f.

<u>**Comme**</u> $(E,*)$ est un groupe abélien d'élément neutre le nombre complexe $(1+i0)$ et que tout nombre complexe $(x+iy)$ admet un seul symétrique $\left(\frac{1}{x}, -\frac{i}{x^4}\right)$ pour la loi $*$ sur E.

<u>**Alors**</u> $(F,\times)$ est un groupe abélien aussi d'élément neutre la matrice $M(1^2,0) = I$ et que toute matrice $M(x,y)$ de F admet une matrice symétrique $sym\big(M(x,y)\big)$ pour la loi $\times$ sur F.

$$\begin{aligned} sym\big(M(x,y)\big) &= sym\left(M\left(\left(\sqrt{x}\right)^2, y\right)\right) \\ &= sym\left(\varphi\left(\sqrt{x}+iy\right)\right) \\ &= \varphi\left(sym\left(\sqrt{x}+iy\right)\right) \\ &= \varphi\left(\frac{1}{\sqrt{x}} - i\,\frac{y}{x^2}\right) \\ &= M\left(\frac{1}{x}\ ;\ \frac{-y}{x^2}\right)\ \epsilon\ F \end{aligned}$$

$$avec\ \ \frac{1}{x} > 0 \quad et \quad \frac{-y}{x^2}\ \epsilon\ \mathbb{R}$$

Le Deuxième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\begin{aligned} \Delta &= (1+i)^2(1+m)^2 - 4(2im) \\ &= (2i)(1+m)^2 - 2i(4m) \\ &= (2i)((1+m)^2 - 4m) \\ &= (2i)(m^2+2m+1-4m) \\ &= (2i)(m^2-2m+1) \\ &= (1+i)^2(m-1)^2 \\ &= \big((1+i)(m-1)\big)^2 \end{aligned}$$

$$\Delta \neq 0 \quad car \quad m \notin \mathbb{R} \quad donc \quad m \neq 1.$$

La Question : I) 1) b)

$$z_1 = \frac{(1+i)(1+m) - (1+i)(m-1)}{2} = 1+i$$

$$z_2 = \frac{(1+i)(1+m) + (1+i)(m-1)}{2} = m(1+i)$$

La Question : I) 2) a)

$$\boldsymbol{Rappel}\ :\ \boxed{e^{ix} + e^{iy} = 2cos\left(\frac{x-y}{2}\right)\ e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}}$$

Soit $m = e^{i\theta}$ avec $0 < \theta < \pi$.

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= (1+i) + m(1+i) \\ &= (1+i)(1+m) \\ &= \left(e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{2}}\right)\left(e^{i0} + e^{i\theta}\right) \\ &= \left(e^{i0} + e^{\frac{i\pi}{2}}\right)\left(e^{i0} + e^{i\theta}\right) \\ &= \left(2\cos\left(\frac{0-\frac{\pi}{2}}{2}\right) e^{i\left(\frac{0+\frac{\pi}{2}}{2}\right)}\right)\left(2\cos\left(\frac{0-\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{0+\theta}{2}\right)}\right) \\ &= \left(2\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)\left(2\cos\left(\frac{-\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= \left(2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= \left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)}\right)\left(2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= \left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 2\cdot\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)\left(e^{i\left(\frac{\pi}{4}\right)} \times e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)}\right) \\ &= 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\ e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)} \end{aligned}$$

$$\text{Donc}\ :\ \left|\begin{array}{l} |z_1+z_2| = 2\sqrt{2}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \\ \arg(z_1+z_2) \equiv \left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta}{2}\right)\ [2\pi] \end{array}\right.$$

Signalons enfin que la quantité $2\,cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ est positive car si $0<\theta<\pi$. alors : $0<\frac{\theta}{2}<\frac{\pi}{2}$. D'où : $cos\left(\frac{\theta}{2}\right)>0$.

La Question : I) 2) b)

On a : $z_1z_2 = m(1+i)(1+i) = 2im$

Soit $m = e^{i\theta}$ avec $0<\theta<\pi$

$$\begin{aligned}
z_1z_2 \in \mathbb{R} &\Longrightarrow 2im \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow 2\left(e^{\frac{i\pi}{2}}\right)\left(e^{i\theta}\right) \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow 2\,e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)} \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \equiv 0\ [\pi] \\
&\Longrightarrow \begin{cases} oubien & \left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \equiv 0\ [2\pi] \\ oubien & \left(\theta+\frac{\pi}{2}\right) \equiv \pi\ [\pi] \end{cases} \\
&\Longrightarrow \begin{cases} oubien & \theta \equiv \frac{-\pi}{2}\ [2\pi] \\ oubien & \theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi] \end{cases} \\
&\Longrightarrow \theta = \frac{\pi}{2}\ ;\ car\ 0<\theta<\pi \\
&\Longrightarrow m = e^{i\theta} = e^{\frac{i\pi}{2}} = i \\
&\Longrightarrow z_1+z_2 = (1+i)+m(1+i) \\
&\qquad\quad = (1+i)+i(1+i) \\
&\qquad\quad = 1+i+i-1 \\
&\qquad\quad = 2i\ ;\ c'est\ gagné
\end{aligned}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

Soit r la rotation définie ainsi :

$$r\left(O,\frac{\pi}{2}\right)\ :\ \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ M(z) & \longmapsto & M'(z') \end{array}$$

$$\begin{aligned}
r(B)=D &\Leftrightarrow (z_D-z_O) = e^{\frac{i\pi}{2}}(z_B-z_O) \\
&\Leftrightarrow (z_D-0) = i\big((1+i)m-0\big) \\
&\Leftrightarrow z_D = (i-1)m
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega \equiv milieu[CD] &\Leftrightarrow z_\Omega = \frac{z_c+z_D}{2} \\
&\Leftrightarrow z_\Omega = \frac{(1-i)+(i-1)m}{2} \\
&\Leftrightarrow \boxed{z_\Omega = \frac{(1-i)(1-m)}{2} = \omega}
\end{aligned}$$

La Question : II) 1) b)

$$\begin{aligned}
\left(\frac{b-a}{\omega}\right) &= \frac{(1+i)m-(1+i)}{(1-i)(1-m)}\times 2 \\
&= \frac{2(1+i)(m-1)}{(i-1)(m-1)} \\
&= \frac{2(1+i)}{(i-1)} \\
&= \frac{2(1+i)(i+1)}{(i-1)(i+1)} \\
&= \frac{2(2i)}{(-2)} = \boxed{-2i}
\end{aligned}$$

La Question : II) 1) c)

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{\omega} = -2i &\Leftrightarrow \frac{z_B-z_A}{z_\Omega-z_O} = -2i \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \left(\frac{z_B-z_A}{z_\Omega-z_O}\right) \in i\mathbb{R} \\
&\Leftrightarrow \boxed{(AB)\perp(O\Omega)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{b-a}{\omega} = -2i &\Longrightarrow \left|\frac{z_B-z_A}{z_\Omega-z_O}\right| = |-2i| \\
&\Longrightarrow \frac{|z_B-z_A|}{|z_\Omega-z_O|} = 2 \\
&\Longrightarrow \frac{AB}{O\Omega} = 2 \\
&\Longrightarrow \boxed{AB = 2\,O\Omega}
\end{aligned}$$

La Question : II) 2) a)

$$\begin{aligned}
(O\Omega)\ coupe\ (AB)\ en\ H &\Longrightarrow A,B,H\ sont\ colinéaires \\
&\Longrightarrow \left(\frac{z_H-z_A}{z_B-z_A}\right) \in \mathbb{R} \\
&\Longrightarrow \boxed{\left(\frac{h-a}{b-a}\right) \in \mathbb{R}}
\end{aligned}$$

$$(O\Omega)\perp(AB) \Longrightarrow (OH)\perp(AB)\ ;\ car\ H\in(O\Omega)$$

$$\Longrightarrow \left(\frac{z_H - z_O}{z_B - z_A}\right)\in i\mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\left(\frac{h}{b-a}\right)\in i\mathbb{R}}$$

La Question : II) 2) b)

$$\begin{cases}\left(\frac{h-a}{b-a}\right)\in\mathbb{R}\\ \left(\frac{h}{b-a}\right)\in i\mathbb{R}\end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases}\overline{\left(\frac{h-a}{b-a}\right)}=\left(\frac{h-a}{b-a}\right)\\ \overline{\left(\frac{h}{b-a}\right)}=-\left(\frac{h}{b-a}\right)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases}\overline{\left(\frac{h}{b-a}\right)}-\overline{\left(\frac{a}{b-a}\right)}=\left(\frac{h-a}{b-a}\right)\\ \overline{\left(\frac{h}{b-a}\right)}=-\left(\frac{h}{b-a}\right)\end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow -\left(\frac{h}{b-a}\right)-\overline{\left(\frac{a}{b-a}\right)}=\left(\frac{h-a}{b-a}\right)$$

$$\Longleftrightarrow -\left(\frac{h}{b-a}\right)-\overline{\left(\frac{1}{m-1}\right)}=\left(\frac{h-a}{b-a}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{h}{a-b}\right)+\left(\frac{h-a}{a-b}\right)=\left(\frac{1}{\overline{m}-1}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \frac{2h-a}{a-b}=\frac{1}{\overline{m}-1}$$

$$\Longleftrightarrow 2h-a=\frac{a-b}{\overline{m}-1}$$

$$\Longleftrightarrow h=\frac{1}{2}\left(a+\frac{a-b}{\overline{m}-1}\right)$$

$$\Longleftrightarrow h=\frac{1}{2}\left(\frac{(1+i)(\overline{m}-1)}{\overline{m}-1}+\frac{(1+i)(1-m)}{\overline{m}-1}\right)$$

$$\Longleftrightarrow h=\frac{1}{2}\left(\frac{(1+i)(\overline{m}-m)}{\overline{m}-1}\right)$$

$$\Longleftrightarrow h=\frac{1}{2}(1+i)\left(\frac{\overline{m}-m}{\overline{m}-1}\right)$$

$$\Longleftrightarrow h=\frac{(1+i)}{2}\left(\frac{-2i\,\mathfrak{Im}(m)}{\overline{m}-1}\right)$$

$$\Longleftrightarrow \boxed{h=(i-1)\left(\frac{\mathfrak{Im}(m)}{1-\overline{m}}\right)}$$

$\mathfrak{Im}(m)$ *signifie la partie imaginaire de m*

Pour la vérification vous ne seriez jamais amené à le faire, Mais pour me rassurer j'ai vérifié la fiabilité de ces résultats en faisant des calculs pénibles de fourmilles dans mon brouillon et j'ai pu réfuter mes doutes en trouvant bien les résultats attendues :

$$\begin{cases}\left(\frac{h-a}{b-a}\right)=\left(\frac{1-\mathcal{Re}(m)}{|m|^2-2\,\mathcal{Re}(m)+1}\right)\in\mathbb{R}\\ \left(\frac{h}{b-a}\right)=\left(\frac{-\mathfrak{Im}(m)}{|m|^2-2\,\mathcal{Re}(m)+1}\right)i\in i\mathbb{R}\end{cases}$$

Et saviez-vous la récompense que vous auriez obtenir comme gain en faisant tout ce vacarme ?!!!!

C'est 0,25 point. !!!!!!

C'est génial non !!!!!! ☹ ☹ ☹ !!!!!

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

On suppose dans cette question que 2969 ne divise pas n.

$$\Longrightarrow 2969\wedge n=1\ ;\ car\ 2969\in\mathbb{P}$$

$$\Longrightarrow \exists\,(v,u)\in\mathbb{Z}^2\ ;\ 2969v+nu=1\ ;\ Bezout$$

$$\Longrightarrow 2969v=(1-nu)$$

$$\Longrightarrow 2969\ divise\ (1-nu)$$

$$\Longrightarrow nu\equiv 1[2969]$$

La Question : 1) b)

D'abord, comme $(nu)=1[2969]$

Alors : $\boxed{(nu)^8=1[2969]}$ (1)

Et comme : $n^8+m^8\equiv 0\,[2969]$

Alors : $n^8\equiv -m^8\,[2969]$

D'où : $n^8\times u^8\equiv -m^8\times u^8\,[2969]$

C-à-d : $\boxed{(nu)^8\equiv -(mu)^8\,[2969]}$ (2)

Comme le relation modulo ($\equiv$) est transitive alors, d'après (1) et (2) on tire : $-(mu)^8\equiv 1\,[2969]$.
C-à-d : $\boxed{(mu)^8\equiv -1\,[2969]}$

D'où l'on tire aussi : $((mu)^8)^{371}\equiv(-1)^{371}\,[2969]$

Ou encore : $\boxed{(mu)^{2968}\equiv -1\,[2969]}$

La Question : 1) c)

On raisonne par l'absurde que le nombre 2969 ne divise pas le produit (mu).

On suppose que 2969 divise (mu).

Alors : $(mu) \equiv 0\ [2969]$

D'où : $(mu)^{2968} \equiv 0\ [2969]$

Mais : $(mu)^{2968} \equiv -1\ [2969]$

Alors on ait : $-1 \equiv 0\ [2969]$

C-à-d : 2969 divise 1.

C'est totalement ridicule et absurde.

Ce qu'on a supposé est donc faux.

C-à-d : 2969 ne divise pas (mu).

La Question : 1) d)

Comme 2969 est un nombre premier qui ne divise pas (mu). Alors : $\boxed{2969 \wedge mu = 1}$

Résumons , On a : $\begin{cases} 2969\ est\ un\ nbr\ premier \\ 2969 \wedge mu = 1 \end{cases}$

Alors, selon Monsieur **FERMAT**, on en déduit la chose suivante : $(mu)^{2969-1} \equiv 1\ [2969]$

C-à-d : $\boxed{(mu)^{2968} \equiv 1\ [2969]}$

La Question : 2) a)

On procède via un raisonnement par l'absurde que le nombre 2969 divise n.

On suppose que 2969 ne divise pas n. Alors d'après l'analyse faite précédemment dans les questions $\boxed{1}\boxed{a}\boxed{b}\boxed{c}\boxed{d}$, On conclut que :

$$\begin{cases} Et\ bien\ \ (mu)^{2968} \equiv -1\ [2969] \\ Et\ bien\ \ (mu)^{2968} \equiv 1\ [2969] \end{cases}$$

Sachant que la relation modulo est transitive donc on en déduit que $1 \equiv -1[2969]$

Ou encore 2969 divise 2.

Mais c'est grossièrement ridicule, absurde et insensé. Ce qu'on avait supposé est par la suite faux. C-à-d que 2969 divise n.

La Question : 2) b)

Pour l'implication directe :

$$(n^8 + m^8) \equiv 0\ [2969]$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} Et\ bien\ \ 2969\ \ divise\ \ n\ \ ;\ \ déjà\ vu \\ Et\ bien\ \ 2969\ \ divise\ \ m\ \ ;\ \ valable \end{cases}$$

Ces deux déclarations sont toutes les deux valables puisque m et n joueraient les mêmes rôles dans cet exercice tout entier.

$$\Longrightarrow \begin{cases} Et\ bien\ \ \ n \equiv 0\ [2969] \\ Et\ bien\ \ \ m \equiv 0\ [2969] \end{cases}$$

Pour l'implication réciproque, elle est trivialement vérifiable. D'où l'on conclut l'équivalence demandée :

$$(n^8 + m^8) \equiv 0\ [2969] \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} Et\ bien\ \ \ n \equiv 0\ [2969] \\ Et\ bien\ \ \ m \equiv 0\ [2969] \end{cases}$$

Autrement dit, les solutions de $(n^8 + m^8) \equiv 0\ [2969]$ dans $\mathbb{N}^2$ sont les couples de multiples de 2969.

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1)

$$\begin{aligned} \lim_{x\to-\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} 4x\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty} (4x^2)\left(\frac{1}{xe^x} + \frac{1}{2} - \frac{1}{x}\right) \\ &\longrightarrow (+\infty)\left(\frac{1}{0^-} + \frac{1}{2} - \frac{1}{-\infty}\right) \\ &\longrightarrow (+\infty)\left(-\infty + \frac{1}{2} + 0\right) \\ &\longrightarrow (-\infty) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} f(x) &= \lim_{x\to-\infty} 4x\left(e^{-x} + \frac{1}{2}x - 1\right) \\ &\longrightarrow (+\infty)(0^+ + \infty - 1) \\ &\longrightarrow (+\infty) \end{aligned}$$

La Question : I) 2) a)

La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ tout entier comme étant le produit de deux fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$: La première est la fonction affine $x \longmapsto 4x$ et la deuxième est une somme de deux autres fonctions toutes dérivables sur $\mathbb{R}$ tout entier : $x \longmapsto e^{-x}$ et $x \longmapsto \frac{1}{2}x - 1$

Soit x un nombre réel,

$$f'(x) = (4x)'\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)+4x\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)'$$
$$= 4\left(e^{-x}+\frac{1}{2}x-1\right)+4x\left(-e^{-x}+\frac{1}{2}\right)$$
$$= 4(e^{-x}-1)+2x-4x\,e^{-x}+2x$$
$$= 4(e^{-x}-1)+4x-4x\,e^{-x}$$
$$= 4(e^{-x}-1)-4x(\,e^{-x}-1)$$
$$= (4-4x)(e^{-x}-1)$$
$$= \boxed{4(1-x)(e^{-x}-1)}$$

La Question : I) 2) b)

x	$-\infty$	0	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	$+$	$-$	
$e^{-x}-1$	$+$	$-$	$-$	
$f'(x)$	$+$	$-$	$+$	
f	$-\infty$ ↗	0 ↘	$f(1)$ ↗	$+\infty$

La Question : I) 2) c)

Rappel : TVI

$$\boxed{\left|\begin{array}{l} f\ continue\ sur\ [a,b] \\ y\ \epsilon\ [f(a);f(b)]\end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \exists\, x\,\epsilon\,[a,b]\ ;\ f(x)=y}$$

$$On\ a\ :\quad f\left(\frac{3}{2}\right)=4\times\frac{3}{2}\times\left(e^{\frac{-3}{2}}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{2}-1\right)$$
$$=6\left(\frac{1}{4{,}5}-\frac{1}{4}\right)<0\ ;\ car\ 4{,}5>4$$

$$On\ a\ aussi\ :\quad f(2)=8(e^{-2}+1-1)=\frac{8}{e^2}>0$$

$$Ainsi\ :\ f\left(\frac{3}{2}\right)<0\quad et\quad f(2)>0$$

$$C-\text{à}-d\ :\ f\left(\frac{3}{2}\right)\times f(2)<0$$

$$Ou\ encore\ :\quad 0\,\epsilon\left[f\left(\frac{3}{2}\right);f(2)\right]$$

$$Résumons\ :\quad \begin{cases} f\ \ est\ \ continue\ \ sur\ \ \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right] \\ 0\,\epsilon\left[f\left(\frac{3}{2}\right);f(4)\right]\end{cases}$$

$$Alors\ d'après\ le\ TVI\ on\ déduit\ :$$

$$\boxed{\exists\ \alpha\ \epsilon\ \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\quad ;\quad f(\alpha)=0}$$

$$Et\ comme\ f\ \ est\ \ strictement\ \ croissante\ \ sur\ \ [1;+\infty[$$

$$Alors\ le\ \alpha\ est\ unique\ dans\ \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]$$

$$\boldsymbol{Finalement}\ :\quad \boxed{\exists!\ \ \alpha\ \epsilon\ \left[\frac{3}{2}\ ;\ 2\right]\quad ;\quad f(\alpha)=0}$$

La Question : I) 2) d)

$$f(\alpha)=0\ \Leftrightarrow\ 4\alpha\left(e^{-\alpha}+\frac{\alpha}{2}-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow\ \left(e^{-\alpha}+\frac{\alpha}{2}-1\right)=0\ \ ;\ \ car\ \ \alpha\neq 0$$
$$\Leftrightarrow\ \boxed{e^{-\alpha}=1-\frac{\alpha}{2}}$$

La Question : I) 3) a)

Rappel : Théorème de ROLLE

$$\boxed{\left|\begin{array}{l} f\ continue\ sur\ [a,b] \\ f\ dérivable\ sur\ ]a,b[\\ f(a)=f(b)\end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \exists\ c\ \epsilon\ ]a,b[\ ;\ f'(c)=0}$$

On vérifie aisément que : $\begin{cases} f'\ \ est\ \ continue\ \ sur\ \ [0{,}1] \\ f'\ \ est\ \ dérivable\ \ sur\ \ ]0{,}1[\\ f'(0)=f'(1)=0\end{cases}$

Donc d'après le Théorème de **ROLLE**, On conclut :

$$\boxed{\exists\ x_0\ \epsilon\ ]0{,}1[\quad ;\quad f''(x_0)=0}$$

La Question : I) 3) b)

Rappel : TAF (Théorème des accroissements finis)

$$\boxed{\left|\begin{array}{l} f\ cont\ [a,b] \\ f\ déri\ \ ]a,b[\end{array}\right. \quad\Longrightarrow\quad \exists\ c\ \epsilon\ ]a,b[\ ;\ \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)=f'(c)}$$

Calculons d'abord $f'''(x)$. c'est très facile de montrer l'existence à travers les théorèmes généraux. Je passe directement au calcul :

$$f'(x)=4e^{-x}-4-4xe^{-x}+4x$$
$$\Longrightarrow\quad f''(x)=-4\,e^{-x}-4\,e^{-x}+4x\,e^{-x}+4$$
$$\Longrightarrow\quad f'''(x)=4\,e^{-x}+4\,e^{-x}+4\,e^{-x}-4x\,e^{-x}$$
$$=12\,e^{-x}-4\,x\,e^{-x}$$
$$=\boxed{4\,e^{-x}(3-x)}$$

Soit x un élément de l'intervalle $[0{,}1]$ différent de x_0 . On considère l'intervalle $[x_0,x]$ (éventuellement $[x,x_0]$).

La fonction f'' est trivialement continue sur $[x_0,x]$ et dérivable sur $]x_0,x[$ car c'est une somme de fonctions continues et dérivables. Alors d'après le **TAF**, appliqué à f'' sur $[x_0,x]$ on déduit que :

$$\exists\ c\ \epsilon\ ]x_0,x[\ \ ;\ \ \left(\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}\right)=f'''(c)$$

$$C-\text{à}-d\ :\ \exists\, c \in]x_0,x[\ ;\ \left(\frac{f''(x)-0}{x-x_0}\right) = 4\,e^{-c}(3-c)$$

$$On\ a\ :\ c \in]x_0,x[\subset]0,1[\ .\ Donc\ \ c<1$$

$$Ainsi\ :\ (3-c)>0$$

$$D'où\ :\ 4\,e^{-c}(3-c)>0\ ;\ car\ e^{-c}>0$$

$$\textbf{Finalement}\ :\ \boxed{\forall\, x \neq x_0\ :\ \frac{f''(x)}{x-x_0}>0}$$

La Question : I) 3) c)

Le point I d'abscisse x_0 est bien un point d'inflexion de la courbe (C) puisque f'' s'annule en x_0 (c-à-d $f''(x_0)=0$) et change de signe au voisinage de x_0.

C-à-d : $\begin{cases} \forall\, x \geq x_0\ ;\ f''(x) \geq 0 \\ \forall\, x \leq x_0\ ;\ f''(x) \leq 0 \end{cases}$

Parce que la quantité $\left(\frac{f''(x)}{x-x_0}\right)$ devrait toujours être positive sur $]0,1[$.

La Question : I) 4) a)

$$On\ a\ :\ \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} 4\left(e^{-x}+\frac{x}{2}-1\right)$$
$$= \lim_{x\to-\infty} 4x\left(\frac{1}{xe^{x}}+\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)$$
$$\longrightarrow (-\infty)\left(\frac{1}{0^-}+\frac{1}{2}-\frac{1}{-\infty}\right)$$
$$\longrightarrow (-\infty)\left(-\infty+\frac{1}{2}+0\right)$$
$$\longrightarrow (+\infty)$$

$$Ainsi\ :\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$

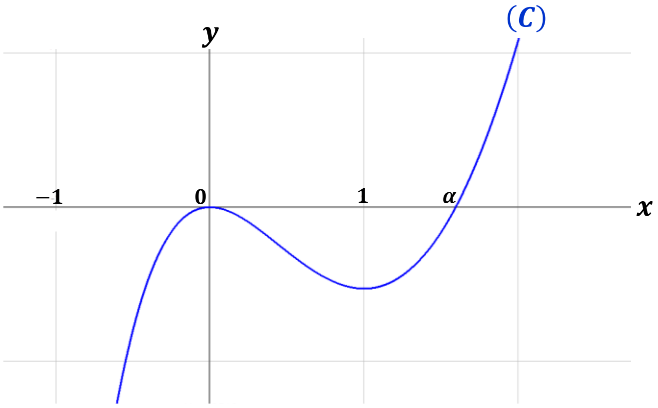
Alors (C) admet une branche parabolique suivant l'axe (OY) au voisinage de $-\infty$

$$On\ a\ aussi\ :\ \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} 4\left(e^{-x}+\frac{x}{2}-1\right)$$
$$\longrightarrow 4(e^{-\infty}+\infty-1)$$
$$\longrightarrow 4(0+\infty-1)$$
$$\longrightarrow (+\infty)$$

$$Ainsi\ :\ \begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty \end{cases}$$

Alors (C) admet une 2ème branche parabolique suivant l'axe (OY) au voisinage de $+\infty$.

La Question : I) 4) b)



La Question : I) 5) a)

$$x \in]-\infty,\alpha] \implies \begin{cases} oubien\ \ x \in]-\infty,0] \\ oubien\ \ x \in [0,1] \\ oubien\ \ x \in [1,\alpha] \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} oubien\ \ x \leq 0 \\ oubien\ \ x \geq 0 \\ oubien\ \ x \leq \alpha \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} oubien\ \ f(x) \leq f(0);\ f \nearrow\ sur\ ]-\infty,0] \\ oubien\ \ f(x) \leq f(0);\ f \searrow\ sur\ [0,1] \\ oubien\ \ f(x) \leq f(\alpha);\ f \nearrow\ sur\ [1,\alpha] \end{cases}$$

$$\implies \begin{cases} oubien\ \ f(x) \leq 0 \\ oubien\ \ f(x) \leq 0 \\ oubien\ \ f(x) \leq 0 \end{cases}\ ;\ avec\ \left| \begin{array}{l} f(0)=0 \\ f(\alpha)=0 \end{array}\right.$$

$$\implies \boxed{f(x) \leq 0\ \ sur\ \ ]-\infty,\alpha]}$$

La Question : I) 5) b)

$$\int_0^{\alpha} f(x)\,dx = 4\int_0^{\alpha} x\left(e^{-x}+\frac{x}{2}-1\right)dx$$
$$= 4\left(\int_0^{\alpha} xe^{-x}\,dx\right) + 2\left(\int_0^{\alpha} x^2\,dx\right) - 4\left(\int_0^{\alpha} x\,dx\right)$$

Reste à évaluer chacune de ces intégrales :

- $\displaystyle\int_0^{\alpha} \underbrace{x}_{u}\,\underbrace{e^{-x}}_{v'}\,dx = [-x\,e^{-x}]_0^{\alpha} - \int_0^{\alpha} -e^{-x}\,dx$

$$= [-x\,e^{-x}]_0^{\alpha} + [-e^{-x}]_0^{\alpha}$$
$$= -\alpha\,e^{-\alpha} - e^{-\alpha} + 1$$
$$= -e^{-\alpha}(1+\alpha)+1$$
$$= -\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)(1+\alpha)+1\ ;\ selon\ \boxed{2}\,\boxed{d}$$
$$= \boxed{\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha}{2}}$$

- $\displaystyle\int_0^{\alpha} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\alpha} = \boxed{\frac{\alpha^3}{3}}$
- $\displaystyle\int_0^{\alpha} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\alpha} = \boxed{\frac{\alpha^2}{2}}$

Finalement : $\displaystyle\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$

$$= 4\left(\frac{\alpha^2}{2}-\frac{\alpha}{2}\right)+2\left(\frac{\alpha^3}{3}\right)-4\left(\frac{\alpha^2}{2}\right)$$

$$= \frac{4\alpha^2}{2}-2\alpha+\frac{2\alpha^3}{3}-\frac{4\alpha^2}{2}$$

$$= \boxed{\frac{2}{3}\alpha(\alpha^2-3)}$$

$$x \in [0,\alpha] \implies f(x)\le 0$$
$$\implies \int_0^{\alpha} f(x)\,dx \le 0$$
$$\implies \frac{2}{3}\alpha(\alpha^2-3)\le 0$$
$$\implies \frac{2\alpha(\alpha-\sqrt{3})(\alpha+\sqrt{3})}{3}\le 0$$
$$\implies (\alpha-\sqrt{3})\le 0 \;;\; car\; \frac{2\alpha(\alpha+\sqrt{3})}{3}>0$$
$$\implies \alpha\le\sqrt{3}$$
$$\implies \boxed{\frac{3}{2}\le\alpha\le\sqrt{3}} \;;\; selon\; \boxed{2}\boxed{c}$$

La Question : II) 5) c)

Soit $\mathcal{A}$ l'aire du domaine planaire mentionné dans l'énoncé.

$$\mathcal{A} = \left(\int_0^{\alpha}|f(x)|\,dx\right)\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

$$= \left(\int_0^{\alpha}-f(x)\,dx\right)\|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$$

$$car\; : \; |f(x)| = -f(x)\;\; sur\;\; [0,\alpha]$$

$$= -\left(\int_0^{\alpha}f(x)\,dx\right)cm^2$$

$$= \boxed{\frac{2\alpha(3-\alpha^2)}{3}\;cm^2}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

Soit $P(n)$ la déclaration suivante : $\boxed{P(n):\; u_n<\alpha}$

Pour $n=0$, On a d'après l'énoncé de la suite $u_0<\alpha$. Donc la proposition $P(0)$ est vraie.
Soit n un entier naturel fixé et on suppose que $P(n)$ soit vraie.

On a d'après $\boxed{I}\boxed{5}\boxed{a}$:

$$\boxed{x>\alpha \implies f(x)<0}\quad(*)$$

Pour $x=u_n$ *on ait* $f(u_n)<0$

$$P(n)\; est\; vraie \implies u_n<\alpha$$
$$\implies \begin{cases} u_n<\alpha \\ f(u_n)<0 \;;\; d'après(*)\end{cases}$$
$$\implies u_n+f(u_n)<\alpha$$
$$\implies u_{n+1}<\alpha$$
$$\implies P(n+1)\; est\; vraie$$

$$Ainsi\; : \begin{cases} P(0)\; est\; vraie \\ P(n)\implies P(n+1)\;;\;\forall n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

D'où d'après la machine récurrence on déduit :

$$\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N}\;\;;\;\; u_n<\alpha}$$

La Question : II) 1) b)

$$n\in\mathbb{N} \implies u_n<\alpha$$
$$\implies f(u_n)\le 0 \;;\; selon\;\boxed{I}\boxed{5}\boxed{a}$$
$$\implies u_n+f(u_n)\le u_n$$
$$\implies u_{n+1}\le u_n$$
$$\implies (u_n)_{n\in\mathbb{N}}\;\; est\;\; une\;\; suite\;\; décroissante$$

La Question : II) 2) a)

$$g(x) = e^{-x}+\frac{1}{2}x-\frac{3}{4}$$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$ car somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = -e^{-x}+\frac{1}{2} = \frac{1-2e^{-x}}{2}$$

x	$-\infty$		$\ln 2$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	$+\infty$	$\searrow$	$0{,}09$	$\nearrow$	$+\infty$

D'après ce beau tableau sans expliciter les cas $]-\infty,\ln 2]$ et $[\ln 2,+\infty[$. On constate que :

$$\forall\, x\in\mathbb{R}\;\;;\;\; g(x)\ge 0{,}09>0$$

$$C-à-d\; : \;\boxed{\forall\, x\in\mathbb{R}\;\;;\;\; g(x)\ge 0}$$

La Question : II) 2) b)

Soit le prédicat $Q(n)$ défini ainsi : $\boxed{Q(n) : u_n \geq 0}$

Pour $n = 0$; $u_0 \geq 0$ Donc $Q(0)$ *est vrai*

Soit $n\epsilon\mathbb{N}$ fixé tel que $Q(n)$ soit vrai

$$Q(n) \text{ est vrai} \Rightarrow u_n \geq 0$$
$$\Rightarrow g(u_n) > 0 \; ; \; \text{selon} \boxed{II}\boxed{2}\boxed{a}$$
$$\Rightarrow \begin{cases} g(u_n) > 0 \\ u_n \geq 0 \\ 4 > 0 \end{cases}$$
$$\Rightarrow 4 \cdot u_n \cdot g(u_n) \geq 0$$
$$\Rightarrow f(u_n) + u_n \geq 0$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \geq 0$$
$$\Rightarrow Q(n+1) \text{ est vrai}$$

$$\text{Ainsi} : \begin{cases} \text{le prédicat } Q(0) \text{ est vrai} \\ Q(n) \Rightarrow Q(n+1) \; ; \; \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

$$\text{Alors} : \boxed{\forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N} \; ; \; u_n \geq 0}$$

La Question : II) 2) c)

La suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ est convergente parce qu'elle est décroissante et minorée par zéro.

La Question : II) 2) d)

$$u_{n+1} = f(u_n) + u_n = 4 \cdot u_n \cdot g(u_n)$$

$$\text{avec } \varphi \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \quad \varphi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \\ x \mapsto 4x\, g(x) \end{array}$$

$$\text{comme } \varphi(\mathbb{R}) \subseteq \mathbb{R} \quad \text{alors } l = \lim(u_n) \text{ vérifie } \varphi(l) = l$$

$$\Leftrightarrow 4 \cdot l \cdot g(l) = l$$
$$\Leftrightarrow l(4\,g(l) - 1) = 0$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien } l = 0 \\ \text{oubien } 4\,g(l) - 1 = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien } l = 0 \\ \text{oubien } g(l) = \dfrac{1}{4} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien } l = 0 \\ \text{oubien } \left(e^{-l} + \dfrac{l}{2} - 1\right) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien } l = 0 \\ \text{oubien } 4l\left(e^{-l} + \dfrac{l}{2} - 1\right) = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \text{oubien } l = 0 \\ \text{oubien } f(l) = 0 \end{cases}$$

La Question : II) 3) a)

$$(u_n)_n \text{ est } \searrow \Rightarrow u_n \leq u_0 < 0$$
$$\Rightarrow f(u_n) \leq f(u_0) \; ; \; \text{car } f \nearrow \text{sur }]-\infty, 0]$$
$$\Rightarrow \boxed{u_{n+1} - u_n \leq f(u_0)}$$

La Question : II) 3) b)

$$\text{Soit} : \boxed{P(n) : \; u_n \leq u_0 + n\,f(u_0)}$$

$$\text{Pour } n = 0 \; ; \; \boxed{u_n \leq u_0} \text{ vérifiée car } (u_n)_n \text{ est } \searrow$$

soit $n\epsilon\mathbb{N}$ *fixé tel que* $P(n)$ *soit vraie*

$$P(n) \text{ est vraie} \Rightarrow u_n \leq u_0 + n\,f(u_0)$$
$$\Rightarrow \begin{cases} u_n \leq u_0 + n\,f(u_0) \\ f(u_n) \leq f(u_0) \; ; \; \text{car } f \nearrow \text{sur }]-\infty, 0] \end{cases}$$
$$\Rightarrow u_n + f(u_n) \leq u_0 + n\,f(u_0) + f(u_0)$$
$$\Rightarrow u_{n+1} \leq u_0 + (n+1)\,f(u_0)$$
$$\Rightarrow P(n+1) \text{ est vraie}$$

$$\text{Ainsi} : \begin{cases} \text{la proposition } P(0) \text{ est vraie} \\ P(n) \Rightarrow P(n+1) \; ; \; \forall n\epsilon\mathbb{N} \end{cases}$$

Alors d'après le principe de récurrence on conclut : $\boxed{\forall\, n \,\epsilon\, \mathbb{N} \; ; \; u_n \leq u_0 + n\,f(u_0)}$

La Question : II) 3) c)

$$u_0 < 0 \Rightarrow f(u_0) < f(0) \; ; \; f \searrow]-\infty, 0]$$
$$\Rightarrow f(u_0) < 0$$
$$\Rightarrow \lim_{n\infty}(n\,f(u_0)) = -\infty$$
$$\Rightarrow u_n \leq \underbrace{u_0 + n\,f(u_0)}_{\boxed{-\infty}}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\infty}(u_n) = -\infty$$
$$\Rightarrow (u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}} \text{ est divergente.}$$

$$\textbf{La conclusion} : \boxed{\begin{cases} u_0 \geq 0 \Rightarrow \lim(u_n) = 0 \\ u_0 < 0 \Rightarrow \lim(u_n) = -\infty \end{cases}}$$

Partagez tous ce document avec vos amis
Professeur Badr Eddine El FATIHI
Ouarzazate, le Mardi 18 juin 2019
En faveur des étudiants SM du MAROC.

☺

★★★★

ROYAUME DU MAROC

2019 R

12

2ième BAC - SM
MAROC

MES PROPOSITIONS DE CORRECTION
DE L'ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES
BACCALAURÉAT SCIENCES MATHÉMATIQUES
SESSION De RATTRAPAGE : JUILLET 2019

PROFESSEUR BADR EDDINE EL FATIHI
PROF DE MATHS AU COLLÈGE CADI AYAD
OUARZAZATE, le Mercredi 10 juillet 2019

Le Premier Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$(E_\alpha): \ z^2 - i\alpha\sqrt{3}\,z - \alpha^2 = 0$$

$$\begin{aligned}\Delta &= \left(-i\alpha\sqrt{3}\right)^2 - 4(-\alpha^2)\\ &= -3\alpha^2 + 4\alpha^2\\ &= \alpha^2\end{aligned}$$

La Question : I) 1) b)

$$\Delta = \alpha^2 \quad \Rightarrow \quad z = \frac{i\alpha\sqrt{3} \pm \sqrt{\alpha^2}}{2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} z_1 = \left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \\ z_2 = \left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \end{cases}$$

La Question : I) 2)

Soit $\alpha = |\alpha|\, e^{i\lambda}$; $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} z_2 &= \left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)\alpha = \left(-\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)\alpha \\ &= \left(\cos\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right)\right)\alpha \\ &= \left(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right)|\alpha|\, e^{i\lambda} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= e^{\frac{i2\pi}{3}}\, |\alpha|\, e^{i\lambda} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= |\alpha|\, e^{i\left(\lambda + \frac{2\pi}{3}\right)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} z_1 &= \left(\frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\alpha \\ &= \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)|\alpha|\, e^{i\lambda} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= e^{\frac{i\pi}{3}}\, |\alpha|\, e^{i\lambda} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &= |\alpha|\, e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

Soient : $\Omega(\alpha)$; $M_1\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\alpha\right)$; $M_2\left(\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}\alpha\right)$

et la rotation définie ainsi :

$$\mathcal{R}\left(0, \frac{\pi}{3}\right) \ : \ \begin{array}{ccc} (\mathcal{P}) & \longmapsto & (\mathcal{P}) \\ \mathrm{M}(z) & \longmapsto & \mathrm{M}'(z') \end{array}$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad \mathrm{M} = \mathcal{R}(\Omega) \quad &\Leftrightarrow \quad (z_M - z_O) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_\Omega - z_O) \\ &\Leftrightarrow \quad (z_M - 0) = e^{\frac{i\pi}{3}}(\alpha - 0) \\ &\Leftrightarrow \quad z_M = e^{\frac{i\pi}{3}}\alpha = |\alpha|\, e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad z_M = z_1 \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{M}_1 = \mathcal{R}(\Omega)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{soit} \quad \mathrm{M}' = \mathcal{R}(\mathrm{M}_1) \quad &\Leftrightarrow \quad (z_{M'} - z_O) = e^{\frac{i\pi}{3}}(z_{M_1} - z_O) \\ &\Leftrightarrow \quad z_{M'} = e^{\frac{i\pi}{3}} z_1 = e^{\frac{i\pi}{3}}|\alpha|\, e^{i\left(\lambda + \frac{\pi}{3}\right)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad z_{M'} = |\alpha|\, e^{i\left(\lambda + \frac{2\pi}{3}\right)} \quad ; \quad \lambda \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow \quad z_{M'} = z_2 \\ &\Leftrightarrow \quad \boxed{\mathrm{M}_2 = \mathcal{R}(M_1)} \end{aligned}$$

La Question : II) 1) b)

$$\mathcal{R}(\Omega) = M_1 \Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } (\overrightarrow{O\Omega}; \overrightarrow{OM_1}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \text{et bien } O\Omega = OM_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } \Omega\widehat{O}M_1 = 60° \\ \text{et bien } O\Omega = OM_1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Le triangle } \Omega OM_1 \text{ est isocèle en } O \\ \text{Avec } \Omega\widehat{O}M_1 = 60° \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow M_1\widehat{\Omega}O = O\widehat{M_1}\Omega = 60°$$

$$\Rightarrow O\Omega M_1 \text{ est équilatéral}$$

$$\mathcal{R}(M_1) = M_2 \Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } (\overrightarrow{OM_1}; \overrightarrow{OM_2}) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi] \\ \text{et bien } OM_1 = OM_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \text{et bien } M_1\widehat{O}M_2 = 60° \\ \text{et bien } OM_1 = OM_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{Le triangle } \Omega M_1M_2 \text{ est isocèle en } O \\ \text{Avec } M_1\widehat{O}M_2 = 60° \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow O\widehat{M_1}M_2 = O\widehat{M_2}M_1 = 60°$$

$$\Rightarrow OM_1M_2 \text{ est équilatéral}$$

La Question : II) 2) a)

Rappel : $\boxed{e^{ix} - e^{iy} = 2i\sin\left(\frac{x-y}{2}\right) e^{i\left(\frac{x+y}{2}\right)}}$

$$z_1 - z_2 = |\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)} - |\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}$$

$$= |\alpha|\, e^{i\lambda}\left(e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{i2\pi}{3}}\right)$$

$$= |\alpha|\, e^{i\lambda}\left(2i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}}{2}\right) e^{i\left(\frac{\frac{\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}}{2}\right)}\right)$$

$$= |\alpha|\, e^{i\lambda}\left(2i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right) e^{\frac{i\pi}{2}}\right)$$

$$= |\alpha|\cdot e^{i\lambda}\cdot \underbrace{(2i)\cdot\left(\frac{-1}{2}\right)\cdot(i)}_{1}$$

$$= |\alpha|\cdot e^{i\lambda}$$

$$= \alpha$$

La Question : II) 2) b)

Rappel : $\boxed{(AB)\perp(CD) \Leftrightarrow \left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) \epsilon\ i\mathbb{R}}$

$$\frac{z_{M_2} - z_\Omega}{z_{M_1} - z_O} = \frac{z_2 - \alpha}{z_1} = \frac{z_2}{z_1} - \frac{\alpha}{z_1}$$

$$= \frac{|\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{2\pi}{3}\right)}}{|\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}} - \frac{|\alpha|\, e^{i\lambda}}{|\alpha|\, e^{i\left(\lambda+\frac{\pi}{3}\right)}}$$

$$= e^{\frac{i\pi}{3}} - e^{\frac{-i\pi}{3}}$$

$$= 2i\cdot\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

$$= 2i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$= i\sqrt{3}\ \epsilon\ i\mathbb{R}$$

D'où : $\boxed{(\Omega M_2)\perp(OM_1)}$

La Question : II) 2) c)

Rappel : un losange est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires.

C-à-d qu'on pourrait montrer que le quadrilatère est un losange en montrant qu'il est d'abord un parallélogramme, Mais avec des diagonales qui soient perpendiculaires.

La deuxième méthode que je présume être recommandée est d'adopter un raisonnement basé sur la définition d'un losange. À savoir, un losange est un quadrilatère dont tous les côtés ont la même longueur.

$$\begin{cases} O\Omega M_1 \ \text{équilatéral} \\ OM_1M_2 \ \text{équilatéral} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} O\Omega = OM_1 = \Omega M_1 \\ OM_1 = OM_2 = M_1M_2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow O\Omega = OM_1 = M_1M_2 = OM_2$$

$$\Rightarrow \boxed{O\Omega M_1M_2 \ \text{est un losange}}$$

La Question : II) 3)

Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $(C) = \mathcal{C}(O, |\alpha|)$.

Soit $M(|\alpha| e^{i\theta})\ \epsilon\ (\mathcal{P})$

$$\begin{cases} O\Omega M_1 \ \text{équilatéral} \\ OM_1M_2 \ \text{équilatéral} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} O\Omega = OM_1 = |\alpha| \\ OM_1 = OM_2 = |\alpha| \end{cases}$$

$$\Rightarrow O\Omega = OM_1 = OM_2 = |\alpha|$$

$$\Rightarrow \{\Omega\,;\,M_1\,;\,M_2\}\ \epsilon\ (C)$$

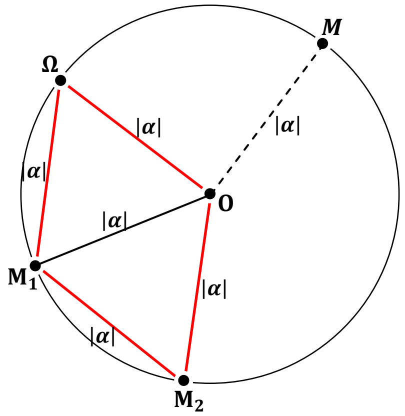
$$\Longrightarrow \ \{\Omega\,;\,M_1\,;\,M_2\,;M\,\} \in (C)\ ;\ \ car\ \ |z_M| = |\alpha|$$

$$\Longrightarrow \ \{\Omega\,;\,M_1\,;\,M_2\,;M\,\}\ \ sont\ \ cocycliques$$

$$\Longrightarrow \ \left(\frac{z_{M_2} - z_{\Omega}}{z_{M_1} - z_{\Omega}}\right) \times \left(\frac{z_{M_1} - z_{M}}{z_{M_2} - z_{M}}\right) \ \in\ \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \ \left(\frac{z_{M_2} - z_{\Omega}}{z_{M_1} - z_{\Omega}}\right) \div \left(\frac{z_{M_2} - z_{M}}{z_{M_1} - z_{M}}\right) \ \in\ \mathbb{R}$$

$$\Longrightarrow \ \left(\frac{z_2 - \alpha}{z_1 - \alpha}\right) \div \left(\frac{z_2 - |\alpha|e^{i\theta}}{z_1 - |\alpha|e^{i\theta}}\right) \ \in\ \mathbb{R}$$



Le Deuxième Exercice

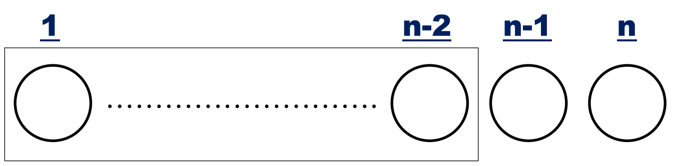
La Question : 1)

D'abord, je signale que, dans cette expérience aléatoire, l'hypothèse d'équiprobabilité est bien évidemment vérifiée car les boules sont identiques et indiscernables au toucher.

Quand on tire n boules, l'une après l'autre, d'une urne contenant n boules au total, alors le nombre de résultats possibles correspond exactement au nombre de combinaisons de n éléments.

Autrement-dit : $card(\Omega) = n!$

Avec Ω est l'ensemble de toutes les éventualités possibles.



Vous avez ici $\boxed{n-2}$ emplacements

On a $(n-2)$ éventualités possibles pour qu'on ait la première boule étant la boule numéro 1.

On a une éventualité possible pour qu'on ait la deuxième boule étant la boule numéro 2 qui suit la boule N° 1.

On a une éventualité possible pour qu'on ait la troisième boule étant la boule numéro 3 qui va suivre la boule numéro 2.

Donc le nombre d'éventualités possibles correspondant à l'obtention des boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ dans cet ordre consécutif est $(n-2) \times 1 \times 1$

Ainsi :

$$p\begin{pmatrix} \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} \\ consécutif \\ cet\ \ ordre \end{pmatrix} = \frac{\text{card}\begin{pmatrix} \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} \\ consécutif \\ cet\ \ ordre \end{pmatrix}}{\text{card}(\Omega)} = \boxed{\frac{\text{n} - 2}{\text{n}!}}$$

La Question : 2)

On s'intéresse maintenant à l'ordre de sortie qui est $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$, Mais peu importe la manière, consécutivement ou pas. Cet ordre précis nous permet de déterminer le nombre total d'éventualités possibles pour ce cas, ce nombre est C_n^3. Je n'ai pas adopter les arrangements A_n^3 parce que j'ai affaire à un seul ordre qui est $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$. C'est comme on a tiré trois boules parmi n autres. Les arrangements A_n^3 prend en considération tous les ordres possibles, à savoir : 123, 132, 213, 231, 312, 321.

Ainsi :

$$p\begin{pmatrix} \boxed{1}\boxed{2}\boxed{3} \\ cet\ \ ordre \\ consécutif\ ou\ non \end{pmatrix} = \frac{\text{C}_\text{n}^3}{\text{card}(\Omega)} = \boxed{\frac{1}{6(\text{n}-3)!}}$$

La Question : 3)

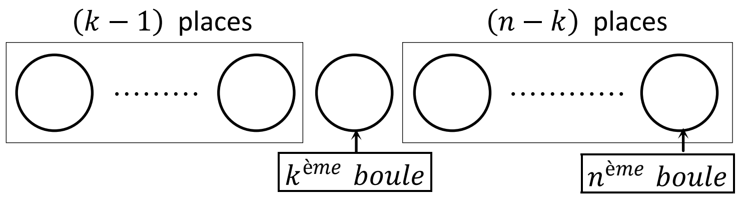
Soit X_n la variable aléatoire qui est égale au nombre de tirage nécessaires pour obtenir les boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$.

On remarque que la valeur minimale de X_n est évidemment 3 c'est-à-dire qu'on peut obtenir les trois boules au cours des trois premiers tirages.
Et la valeur maximale est n. c'est-à-dire qu'on pourrait avoir les boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ au cours des trois derniers tirages de notre expérience aléatoire.
Donc les valeurs possibles de X_n sont 3, 4, … , n.
ou encore : $X_n(\Omega) = \{3, 4, \dots\dots\dots, n\}$.

La loi de probabilité de la variable aléatoire X_n est l'application P_{X_n} définie ainsi :

$$\begin{array}{rccl} P_{X_n} : & X_n(\Omega) & \longmapsto & [0,1] \\ & k & \longmapsto & P_{X_n}(k) = p[X_n = k] \end{array}$$

On considère le schéma suivant qui renseigne sur la forme générale de chaque résultat de la variable aléatoire X_n défini dans l'énoncé.



Il y a 3 éventualités possibles valables pour l'emplacement numéro k. car cette place devrait recevoir ou bien la boule $\boxed{1}$, la boule $\boxed{2}$, ou bien la boule $\boxed{3}$.

Après avoir remplir l'emplacement numéro k, il nous reste deux boules parmi $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$ pour les $(k-1)$ emplacement sur la figure.
Et la distribution de deux boules sur $(k-1)$ emplacements, en prenant en considération l'ordre, s'effectue selon A_{k-1}^2 différentes manières possibles.

Après avoir servir les boules $\boxed{1}\boxed{2}\boxed{3}$, il nous reste à distribuer les $(n-3)$ boules sur $(n-3)$ places vides. Et pour se faire, il existe $(n-3)!$ façons possibles.

Alors, d'après le principe multiplicatif, on dénombre facilement les cas possibles correspondant à la vérification de l'événement $(X_n = k)$:

Soit : $card(X_n = k) = 3 \cdot A_{k-1}^2 \cdot (n-3)!$

Ainsi : $$P_{X_n}(k) = P[X_n = k] = \frac{card(X_n = k)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{3(n-3)!\ A_{k-1}^2}{n!}$$

$$= \frac{3(n-3)!}{n!} \times \frac{(k-1)!}{(k-3)!}$$

$$= \frac{3(n-3)! \cdot (k-1)(k-2) \cdot (k-3)!}{n(n-1)(n-2) \cdot (n-3)! \cdot (k-3)!}$$

$$= \boxed{\frac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}}$$

Finalement, la loi de probabilité de la variable aléatoire X_n est l'application P_{X_n} définie ainsi :

$$\begin{array}{llll} P_{X_n} : & \{3,4,\ldots\ldots,n\} & \longmapsto & [0,1] \\ & k & \longmapsto & P_{X_n}(k) = \dfrac{3(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} \end{array}$$

À titre de vérification :

$$\sum_{k=3}^{n} P_{X_n}(k) = \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{k=3}^{n} (k^2 - 3k + 2)$$

$$= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=0}^{n-3} [(i+3)^2 - 3(i+3) + 2]$$

$$= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \sum_{i=0}^{n-3} (i^2 + 3i + 2)$$

$$= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{(n-3)(n-2)(2n-5)}{6} + \frac{3(n-3)(n-2)}{2} + 2(n-2) \right)$$

$$= \frac{3}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{(n-3)(n-2)(2n-5) + 9(n-3)(n-2) + 12(n-2)}{6} \right)$$

$$= \frac{3(n-2)}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{2n^2 - 11n + 15 + 9n - 27 + 12}{6} \right)$$

$$= \frac{3(n-2)}{n(n-1)(n-2)} \left(\frac{2n^2 - 2n}{6} \right)$$

$$= \frac{3(n-2) \cdot 2n(n-1)}{6n(n-1)(n-2)}$$

$$= \frac{6n(n-1)(n-2)}{6n(n-1)(n-2)} = 1$$

Ainsi : $$\boxed{\sum_{k=3}^{n} P_{X_n}(k) = 1}$$

Le Troisième Exercice

La Question : 1) a)

Rappel : dans un espace vectoriel de dimension finie, une famille $(\vec{x}, \vec{y})$ est une base si et seulement si $det(\vec{x}, \vec{y}) \neq 0$.

$$On\ a\ :\ det(\vec{e_1}\,;\,\vec{e_2}) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = \frac{-1}{2} \neq 0$$

Donc $(\vec{e_1}, \vec{e_2})$ est une base de v_2.

La Question : 1) b)

Par la suite je vais adopter l'écriture $\vec{u} = \binom{x}{y}$ au lieu de $\vec{u} = x\,\vec{\imath} + y\,\vec{\jmath}$ juste pour simplifier les écritures et être à l'aise dans la rédaction.

$$Ainsi\ :\ \binom{x}{y} * \binom{x'}{y'} = \binom{xx' + yy'}{xy' + yx'}$$

$$\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_1}$$

$$\overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} + \frac{-1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{e_1} * \overrightarrow{e_2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ \frac{-1}{4} + \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{e_2} * \overrightarrow{e_1} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

La Question : 1) c)

Soient (X, Y, X', Y') un quadriletère dans $\mathbb{R}^4$.

$$(X\,\overrightarrow{e_1} + y\,\overrightarrow{e_2}) * (X'\overrightarrow{e_1} + Y'\overrightarrow{e_2}) =$$

$$= \left(X \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right) * \left(X' \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + Y' \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{X+Y}{2} \\ \frac{X-Y}{2} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} \frac{X'+Y'}{2} \\ \frac{X'-Y'}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{(X+Y)(X'+Y') + (X-Y)(X'-Y')}{4} \\ \frac{(X+Y)(X'-Y') + (X-Y)(X'+Y')}{4} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{XX' + YY'}{2} \\ \frac{XX' - YY'}{2} \end{pmatrix}$$

$$= XX' \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} + YY' \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{XX'\,\overrightarrow{e_1} + YY'\,\overrightarrow{e_2}}$$

La Question : 2) a)

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ deux éléments de v_2.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x'x + y'y \\ y'x + x'y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

C'est trop facile car la commutativité de la loi $*$ dans v_2 résulte de celle de la loi $+$ dans $\mathbb{R}$.

La Question : 2) b)

Soient $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$ trois éléments de v_2.

Dans un premier temps, On a :

$$\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \right) * \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xx' + yy' \\ xy' + yx' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x''(xx' + yy') + y''(xy' + yx') \\ y''(xx' + yy') + x''(xy' + yx') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'x'' + x''yy' + xy'y'' + x'yy'' \\ yy'y'' + xx'y'' + xy'x'' + yx'x'' \end{pmatrix}$$

Et dans un second temps, On ait :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \left(\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x'x'' + y'y'' \\ x'y'' + y'x'' \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x(x'x'' + y'y'') + y(x'y'' + y'x'') \\ x(x'y'' + y'x'') + y(x'x'' + y'y'') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} xx'x'' + x''yy' + xy'y'' + x'yy'' \\ yy'y'' + xx'y'' + xy'x'' + yx'x'' \end{pmatrix}$$

Donc $*$ est une loi associative sur v_2.

La Question : 2) c)

Soit $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ l'élément neutre

Alors : $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in v_2$; $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

À cause de la commutativité de la loi $*$, on se restreint à une seule égalité.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} xu + yv \\ xv + yu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} Et\ bien\ \ xu + yv = x \\ Et\ bien\ \ xv + yu = y \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} Et\ bien\ \ x(u-1) + yv = 0 \\ Et\ bien\ \ xv + y(u-1) = 0 \end{cases}$$

$$\iff x(u-1) + yv = xv + y(u-1)$$

$$\iff x(u-1) - y(u-1) + yv - xv = 0$$

$$\iff (x-y)(u-1) - v(x-y) = 0$$

$$\iff (x-y)(u-v-1) = 0$$

$$\iff \begin{cases} ou\ bien\ \ x = y \\ ou\ bien\ \ u = v + 1 \end{cases}$$

On remplace u par la quantité $(v+1)$ dans l'une des équations précédentes on obtient :

$$x(v+1) + yv = x \iff xv + x + yv = x$$

$$\iff v(x+y) = 0$$

$$\iff \begin{cases} ou\ bien\ \ v = 0 \\ ou\ bien\ \ x = -y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien & \boxed{v=0} \\ ou\ bien & x=-y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ou\ bien & \boxed{v=0} \Longrightarrow \boxed{u=1} \\ ou\ bien & x=-y \end{cases}$$

Ainsi, le vecteur $\binom{1}{0}$ est l'élément neutre pour la loi $*$ sur v_2.

La Question : 2) d)

$(v_2,+,*)$ est bien-évidemment un anneau commutatif car les assertions suivantes sont vérifiées :

- $(v_2,+)$ est un groupe abélien.
- $*$ est associative sur v_2.
- $*$ est distributive par rapport à + sur v_2.
- $*$ est commutative sur v_2.

La première assertion est pratiquement vérifiable car + est une loi de composition interne dans v_2 qui est associative, commutative, admet un élément neutre $\binom{0}{0}$ et que tout élément $\binom{a}{b}$ de v_2 admet un seul symétrique $\binom{-a}{-b}$ dans v_2.

Pour la 2ème et la 4ème assertions, c'est déjà fait dans $\boxed{2}\boxed{a}$ et $\boxed{2}\boxed{b}$.

Pour la 3ème assertion, on se donne trois éléments $\binom{a}{b},\binom{c}{d},\binom{e}{f}$ dans v_2 :

$$On\ a\ :\ \binom{a}{b}*\left(\binom{c}{d}+\binom{e}{f}\right)=\binom{a}{b}*\binom{c+e}{d+f}$$

$$=\binom{a(c+e)+b(d+f)}{a(d+f)+b(c+e)}$$

$$=\binom{ac+ae+bd+bf}{ad+af+bc+be}$$

$$Or\ :\ \binom{a}{b}*\binom{c}{d}+\binom{a}{b}*\binom{e}{f}=\binom{ac+bd}{ad+bc}+\binom{ae+bf}{af+be}$$

$$=\binom{ac+ae+bd+bf}{ad+af+bc+be}$$

$$C-\text{à}-d\ :\ \boxed{\binom{a}{b}*\left(\binom{c}{d}+\binom{e}{f}\right)=\binom{a}{b}*\binom{c}{d}+\binom{a}{b}*\binom{e}{f}}$$

Ou encore, On dira que $*$ est distributive par rapport à + à gauche. Même travail pour la distributivité à droite pour conclure finalement que la loi $*$ est distributive par rapport à la loi +

La Question : 3) a)

On remarque, au prime abord, que $E_{\vec{u}}$ est une partie non vide de v_2 .
car : si $\vec{x}\,\epsilon\, E_{\vec{u}}$ $alors$ $\vec{x}=\lambda\vec{u}$; $\lambda\epsilon\mathbb{R}$.
Donc : $\vec{x}\,\epsilon\, v_2$ car $(v_2,+,\cdot)$ est un esp vectoriel.

Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}$, Alors ils existent λ et θ de $\mathbb{R}$ tels que : $\vec{x}=\lambda\vec{u}$ et $\vec{y}=\theta\vec{u}$.

On a : $\vec{x}-\vec{y}=\lambda\vec{u}-\theta\vec{u}=(\lambda-\theta)\vec{u}\,\epsilon\, E_{\vec{u}}$ car $(\lambda-\theta)\,\epsilon\,\mathbb{R}$

Ainsi : $\begin{cases} E_{\vec{u}}\subseteq v_2 \quad et \quad E_{\vec{u}}\neq\emptyset \\ \forall\,\vec{x},\vec{y}\,\epsilon\, E_{\vec{u}}\ ;\ x+sym(\vec{y})\,\epsilon\, E_{\vec{u}} \end{cases}$

Donc, d'après la caractérisation des sous-groupes, on conclut que $(E_{\vec{u}},+)$ est un sous-groupe de $(v_2,+)$.

La Question : 3) b)

Rappel : $\boxed{\left.\begin{matrix}\mathcal{F}\ est\ un\ sev \\ de\ l'esp(E,+,\cdot)\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}(\forall\alpha\epsilon\mathbb{R})(\forall\, x,y\,\epsilon\,\mathcal{F}) : \\ (\alpha x+y)\,\epsilon\,\mathcal{F}\end{matrix}\right.}$

Soient $\alpha\,\epsilon\,\mathbb{R}$ et $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}\subseteq v_2$.

$$\alpha\,\vec{x}+\vec{y}=\alpha(\lambda_1\vec{u})+\lambda_2\,\vec{u}=(\alpha\lambda_1+\lambda_2)\vec{u}\ \epsilon\ E_{\vec{u}}$$

Car $(\alpha\lambda_1+\lambda_2)$ est un nombre réel.

Ainsi : $(E_{\vec{u}},+,\cdot)$ est un sous-espace vectoriel de $(v_2,+,\cdot)$. Et ceci d'après la caractérisation des sous-espaces vectoriels mentionnée au début.

La Question : 3) c)

Soit $\vec{u}=\binom{a}{b}\ \epsilon\ v_2\backslash\{\vec{0}\}$.

Soient $\vec{x}=\lambda_1\vec{u}$; $\vec{y}=\lambda_2\vec{u}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}$.

On a : $\vec{u}*\vec{u}=\binom{a}{b}*\binom{a}{b}=\binom{a^2+b^2}{2ab}$

$$E_{\vec{u}}\ est\ stable\ pour\ * \Longrightarrow \vec{x}*\vec{y}\ \epsilon\ E_{\vec{u}}$$

$$\Longrightarrow \exists\,\lambda\,\epsilon\,\mathbb{R}\ ;\ \lambda_1\,\vec{u}*\lambda_2\,\vec{u}=\lambda\,\vec{u}$$

$$\Longrightarrow \binom{\lambda_1 a}{\lambda_1 b}*\binom{\lambda_2 a}{\lambda_2 b}=\binom{\lambda a}{\lambda b}$$

$$\Longrightarrow \binom{\lambda_1\lambda_2 a^2+\lambda_1\lambda_2 b^2}{\lambda_1\lambda_2 ab+\lambda_1\lambda_2 ab}=\binom{\lambda a}{\lambda b}$$

$$\Longrightarrow \lambda_1\lambda_2\binom{a^2+b^2}{2ab}=\lambda\binom{a}{b}$$

$$\Longrightarrow \lambda_1\lambda_2(\vec{u}*\vec{u})=\lambda\,\vec{u}$$

$$\Longrightarrow \vec{u}*\vec{u}=\frac{\lambda}{\lambda_1\lambda_2}\,\vec{u}$$

$$\Longrightarrow \vec{u}*\vec{u}=\tilde{\lambda}\,\vec{u}\ ;\ \tilde{\lambda}=\frac{\lambda}{\lambda_1\lambda_2}$$

$$\Longrightarrow \vec{u}\ \ et\ \ \vec{u}*\vec{u}\ \ sont\ liés$$

Inversement : Si $\vec{u} * \vec{u}$ et $\vec{u}$ sont liés,
Alors : $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$; $\vec{u} * \vec{u} = \alpha\, \vec{u}$

$C-à-d$: $\begin{pmatrix} a^2+b^2 \\ 2ab \end{pmatrix} = \alpha\, \vec{u}$

Soient $\vec{x}$ et $\vec{y}$ deux vecteurs de $E_{\vec{u}}$.

$$On\ a\ :\ \vec{x} * \vec{y} = \lambda_1\lambda_2 \begin{pmatrix} a^2+b^2 \\ 2ab \end{pmatrix}$$
$$= \lambda_1\lambda_2 \cdot \alpha\, \vec{u}$$
$$= \ell\, \vec{u} \in E_{\vec{u}}$$

Donc $E_{\vec{u}}$ est stable pour la loi $*$.

La Question : 4) a)

Soit : φ : $(\mathbb{R}^*,\times) \longmapsto (E_{\vec{u}},*)$

$$x \longmapsto \frac{x}{\alpha}\, \vec{u}$$

$Avec$: $\vec{u} * \vec{u} = \alpha\, \vec{u}$

Rappel : d'après le calcul fait précédemment on a eu : $\boxed{\lambda_1\vec{u} * \lambda_2\vec{u} = \lambda_1\lambda_2\, (\vec{u} * \vec{u})}$

Soient a et b deux nombres réel non nuls.

$$\varphi(a) * \varphi(b) = \left(\frac{a}{\alpha}\, \vec{u}\right) * \left(\frac{b}{\alpha}\, \vec{u}\right)$$
$$= \left(\frac{a}{\alpha} \times \frac{b}{\alpha}\right) \vec{u} * \vec{u}$$
$$= \left(\frac{ab}{\alpha^2}\right) \vec{u} * \vec{u}$$
$$= \left(\frac{ab}{\alpha^2}\right) \cdot \alpha\, \vec{u}$$
$$= \left(\frac{ab}{\alpha}\right) \cdot \vec{u}$$
$$= \varphi(a \times b)$$

Donc : φ est un homomorphisme de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E_{\vec{u}},*)$

En plus, φ est bijective car elle est injective et surjective :

Injective car : $\varphi(x) = \varphi(y) \Rightarrow \frac{x}{\alpha}\, \vec{u} = \frac{y}{\alpha}\, \vec{u}$

$$\Rightarrow \frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\alpha}$$
$$\Rightarrow x = y$$

Surjective car : $(\forall (\lambda\vec{u}) \in E_{\vec{u}})\ (\exists\, x = \lambda\alpha \in \mathbb{R}^*)$; $\varphi(x) = \lambda\vec{u}$

Finalement : φ est un isomorphisme (homomorphisme bijectif) de $(\mathbb{R}^*,\times)$ vers $(E_{\vec{u}},*)$.

La Question : 4) b)

Pour montrer que $(E_{\vec{u}},+,*)$ est un corps commutatif, on vérifie les assertions suivantes :

- $(E_{\vec{u}},+)$ est un groupe abélien.
- $\left(E_{\vec{u}} \backslash \{\vec{0}\}\, ;\, *\right)$ est un groupe.
- $*$ est distributive par rapport à + .
- $*$ est commutative sur $E_{\vec{u}}$.

Pour la première assertion, c'est déjà fait, exactement dans la question $\boxed{3}\,\boxed{a}$: $(E_{\vec{u}},+)$ est un sous-groupe de $(v_2,+)$.

Pour la 2ème assertion, On sait très bien que $(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe, Alors $\varphi(\mathbb{R}^*,\times)$ est un groupe aussi. Car φ est un isomorphisme.
Et on ait : $\varphi(\mathbb{R}^*,\times) = (\varphi(\mathbb{R}^*),*) = \left(E_{\vec{u}} \backslash \{\vec{0}\}\, ;\, *\right)$.

Pour la distributivité de $*$ par rapport à $+$ c'est déjà fait aussi.

Pour la 4ème assertion c'est déjà fait.

La conclusion : $(E_{\vec{u}},+,*)$ est un corps commutatif et cela d'après la caractérisation des corps vue dans le cours ☺

Le Quatrième Exercice

La Première partie

La Question : I) 1) a)

$$\lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} g(x) = \lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} \left(1 + x^2 + 2x(1+x)\ln(1+x)\right)$$
$$= 2 + 2\lim_{\substack{x\to-1 \\ x>-1}} x(1+x)\ln(1+x)$$
$$= 2 + 2\lim_{\substack{t\to0 \\ t>0}} (t-1)\cdot t\ln t$$
$$= 2 + 2\lim_{t\to0^+} (t-1) \times \lim_{t\to0^+} (t\ln t)$$
$$\longrightarrow\ 2 + 2\times(-1)\times 0$$
$$\longrightarrow\ \boxed{2}$$

La Question : I) 1) b)

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)$$

$x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1\, ;\, +\infty[$.
$x \longmapsto 2x(1+x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.
$x \longmapsto (1+x^2)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Alors g est dérivable sur $I =]-1,+\infty[$.

Soit $x \in I,\ g'(x) = 2x - 2(x(1+x)\ln(1+x))'$

$$= 2x - 2\left((1+x)\ln(1+x) + x\ln(1+x) + \frac{x(1+x)}{1+x}\right)$$

$$= 2x - 2\big((1+2x)\ln(1+x) + x\big)$$

$$= -2(1+2x)\ln(1+x)$$

La Question : I) 2) a)

D'après ce beau tableau, On remarque que g est une fonction continue et est strictement décroissante sur $[0,+\infty[$. Donc g est une bijection de l'intervalle $[0,+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty,1]$.

Ainsi : $(\forall\, y \in]-\infty,1]\,),(\exists!\, x \in [0,+\infty[\,)\ :\ g(x) = y$

C-à-d : $(pour\ 0 \in]-\infty,1]\,),(\exists!\, \alpha \in [0,+\infty[\,)\ :\ g(x) = 0$

La Question : I) 2) b)

On a : $g(1) = 1 + 1^2 - 2 \times 2\ln 2 \approx -0{,}77 < 0.$
Ainsi : $g(1) < 0.$
D'où : $g(1) < g(\alpha).$
C-à-d : $\boxed{1 > \alpha}$ car $g\ est\ decroissante\ et\ bijective.$

La Question : I) 2) c)

$$x \in]-1,\alpha[\ \Longrightarrow\ x < \alpha$$
$$\Longrightarrow\ g(x) > g(\alpha)\ ;\ car\ g \searrow [0,+\infty[$$
$$\Longrightarrow\ \boxed{g(x) > 0}\ ;\ car\ g(\alpha) = 0$$

$$x \in]\alpha,+\infty[\ \Longrightarrow\ x > \alpha$$
$$\Longrightarrow\ g(x) < g(\alpha)\ ;\ car\ g \searrow [0,+\infty[$$
$$\Longrightarrow\ \boxed{g(x) < 0}\ ;\ car\ g(\alpha) = 0$$

La Deuxième partie

La Question : II) 1) a)

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x) = \lim_{x\to(-1)^+} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

$$= \left(\lim_{x\to(-1)^+} \ln(1+x)\right) \times \left(\lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$= \left(\lim_{t\to0^+} \ln t\right) \times \left(\lim_{x\to(-1)^+} \frac{1}{1+x^2}\right)$$

$$\longrightarrow (-\infty) \times \left(\frac{1}{2}\right) = \boxed{-\infty}$$

Donc l'axe $\boxed{x = -1}$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

La Question : II) 1) b)

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x}\right) \times \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)$$

$$= \left(\lim_{\substack{t\to+\infty \\ t=x+1}} \frac{\ln t}{t}\right) \times \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{1+x}{1+x^2}\right)$$

$$\longrightarrow 0^+ \times 0^+ \longrightarrow \boxed{0^+}$$

Donc l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$

La Question : II) 2) a)

Comme $x \longmapsto \ln(1+x)$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$ car c'est une composition bien définie de deux fonctions toutes les deux dérivables : La première est la fonction $x \longmapsto \ln x$ dérivable sur $]0,+\infty[$. La deuxième est $x \longmapsto 1+x$ dérivable sur $\mathbb{R}$.

Et comme $x \longmapsto 1+x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$
et $(\forall x\in\mathbb{R})$: $1+x^2 \neq 0$.
Alors : $x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}$ est dérivable sur $]-1,+\infty[$
comme étant un quotient de deux fonctions dérivables dont le dénominateur est non nul.
Soit : $x \in I =]-1,+\infty[$;

$$f'(x) = \left(\frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\right)'$$

$$= \frac{(1+x^2)(\ln(1+x))' - (1+x^2)'\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right) - 2x\ln(1+x)}{(1+x^2)^2}$$

$$= \frac{1+x^2 - 2x(1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$$

$$= \boxed{\frac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}}$$

La Question : II) 2) b)

On a : $(\forall\, x \in I)$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x)(1+x^2)^2}$

Remarquons, au prime abord, que la quantité $(1+x^2)^2$ est toujours positive. Donc le signe de $f'(x)$ sur I dépend des signes des quantités $(1+x)$ et $g(x)$. Le tableau suivant résume le signe de $f'(x)$.

x	-1		α		$+\infty$
$1+x$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$+$	0	$-$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$\boxed{-\infty}$	$\nearrow$	$\boxed{\dfrac{1}{2\alpha(\alpha+1)}}$	$\searrow$	$\boxed{0^+}$

La Question : II) 2) c)

$$g(\alpha)=0 \iff 1+\alpha^2-2\alpha(1+\alpha)\ln(1+\alpha)=0$$
$$\iff \ln(1+\alpha)=\frac{1+\alpha^2}{2\alpha(1+\alpha)}$$
$$\iff \frac{\ln(1+\alpha)}{1+\alpha^2}=\frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}$$
$$\iff \boxed{f(\alpha)=\frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}}$$

$$x\,\epsilon\, I \implies \begin{cases} oubien & x\leq\alpha \\ oubien & x\geq\alpha \end{cases}$$
$$\implies \begin{cases} oubien & f(x)\leq f(\alpha)\ car\ f\ \nearrow\ ]-1,\alpha] \\ oubien & f(x)\leq f(\alpha)\ \ car\ f\ \searrow\ [\alpha,+\infty[\end{cases}$$
$$\implies f(x)\leq f(\alpha)\quad ;\quad \forall\, x\,\epsilon\, I$$
$$\implies \boxed{f(x)\leq\frac{1}{2\alpha(1+\alpha)}\quad ;\quad \forall\, x\,\epsilon\, I}$$

La Question : II) 3) a)

Soit (T) la tangente à (C) au point d'abscisse 0.

$$(T)\ :\ y=(x-0)f'(0)+f(0)$$
$$\iff \boxed{(T)\ :\ y=x}$$

La Question : II) 3) b)

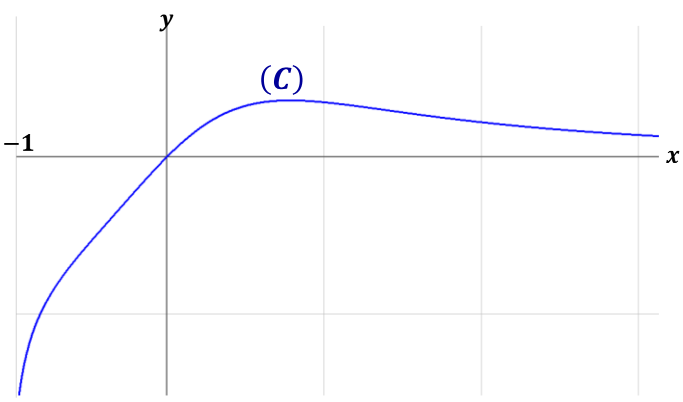
Soient x et t deux nombres réels tels que $x>t>0$

$$t\geq 0 \iff t+1\geq 1$$
$$\iff \frac{1}{t+1}\leq 1\quad ;\quad t\neq -1$$
$$\implies \int_0^x\left(\frac{1}{t+1}\right)dt\leq\int_0^x 1\ dt$$
$$\implies [\ \ln|1+t|\ ]_0^x\leq [t]_0^x$$
$$\implies \ln|1+x|-0\leq x-0$$
$$\implies \boxed{\ln(1+x)\leq x}$$

La Question : II) 3) c)

$$x\geq 0 \implies x^2\geq 0$$
$$\implies x^2+1\geq 1$$
$$\implies \frac{1}{x^2+1}\leq 1\quad ;\ passage\ à\ l'inverse$$
$$\implies \frac{\ln(1+x)}{x^2+1}\leq x\quad ;\quad d'après\ \boxed{3}\boxed{b}$$
$$\implies \boxed{\forall\, x\geq 0\quad ;\quad f(x)\leq x}$$

La Question : II) 3) d)



La Troisième partie

La Question : III) 1) a)

■ $\boxed{J=\int_0^1 f(x)\,dx}$

On pose $\boxed{t=\dfrac{1-x}{1+x}}$ Alors $\boxed{x=\dfrac{1-t}{1+t}}$; | facile à démontrer

$$\left|\begin{array}{l} x=0 \iff t=1 \\ x=1 \iff t=0 \end{array}\right.$$

$$\frac{dx}{dt}=\frac{(1-t)'(1+t)-(1+t)'(1-t)}{(1+t)^2}=\frac{-2}{(1+t)^2}$$

Alors : $\boxed{dx=\dfrac{-2}{(1+t)^2}\,dt}$

$$f(x)=f\left(\frac{1-t}{1+t}\right)=\frac{\ln\left(1+\frac{1-t}{1+t}\right)}{1+\left(\frac{1-t}{1+t}\right)^2}=\frac{\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)}{\frac{2(1+t^2)}{(1+t)^2}}$$
$$=\frac{(1+t)^2}{2(1+t)^2}\times\ln\left(\frac{2}{1+t}\right)$$

Ainsi : $\boxed{f(x)=\dfrac{(1+t)^2}{2(1+t)^2}\times\ln\left(\dfrac{2}{1+t}\right)}$

■ $J = \int_0^1 f(x)\,dx$

$$= \int_1^0 \frac{(1+t)^2}{2(1+t)^2} \times \ln\left(\frac{2}{1+t}\right) \times \frac{-2}{(1+t)^2}\,dt$$

$$= -\int_1^0 \ln\left(\frac{2}{1+t}\right) \times \left(\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt$$

$$= \int_0^1 (\ln(2) - \ln(1+t)) \times \left(\frac{1}{1+t^2}\right)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{\ln 2}{1+t^2}\right) dt - \int_0^1 \left(\frac{\ln(1+t)}{1+t^2}\right) dt$$

$$= \ln 2 \cdot [Arctan\ t]_0^1 - J$$

$$= \ln 2 \cdot \left(\frac{\pi}{4} - 0\right) - J$$

$$= \frac{\pi \ln 2}{4} - J$$

$Ainsi \quad : \quad J = \frac{\pi \ln 2}{4} - J$

$C-à-d \quad : \quad J + J = \frac{\pi \ln 2}{4}$

$Ou\ encore \quad : \quad 2J = \frac{\pi \ln 2}{4}$

$Finalement \quad : \quad \boxed{J = \frac{\pi \ln 2}{8}}$

La Question : III) 1) b)

L'aire $\mathcal{A}$ du domaine demandé dans cette question se calcule ainsi :

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x) - x|\,dx \quad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$= \int_0^1 (x - f(x))\,dx$$

$Car \ : \ \boxed{\forall\, x \geq 0 \ ; \quad f(x) \leq x}$

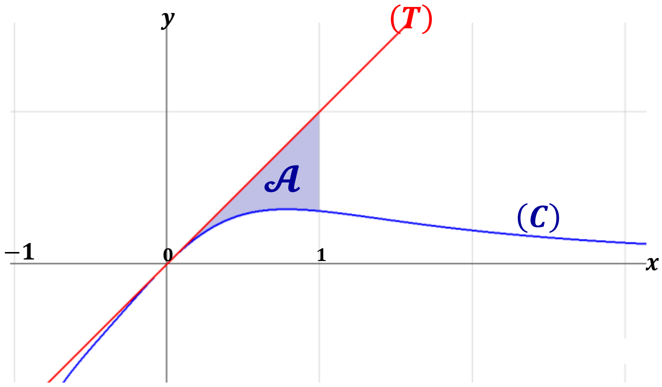
$$\mathcal{A} = \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \frac{\pi\ \ln 2}{8}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{\pi\ \ln 2}{8} \quad \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

$$= \left(\frac{1}{2} - \frac{\pi\ \ln 2}{8}\right)(4\ cm^2)$$

$$= \boxed{\left(2 - \frac{\pi \ln 2}{2}\right) cm^2}$$



La Question : III) 2)

$$K = \int_0^1 \underbrace{(Arctan\ x)}_{u(x)} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{1+x}\right)}_{v'(x)} dx$$

$$= [Arctan\ x \cdot \ln(1+x)]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} \cdot \ln(1+x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{4}\ln 2 - \frac{\pi}{8}\ln 2$$

$$= \boxed{\frac{\pi \ln 2}{8}}$$

La Question : III) 3)

On pose : $\theta = \tan x$; $\left| \begin{array}{lll} x = 0 & \Leftrightarrow & \theta = 0 \\ x = \pi/4 & \Leftrightarrow & \theta = 1 \end{array} \right.$

$$\frac{d\theta}{dx} = (\tan x)' = 1 + tan^2 x = 1 + \theta^2$$

$Alors \quad : \quad \boxed{dx = \left(\frac{1}{1+\theta^2}\right) d\theta}$

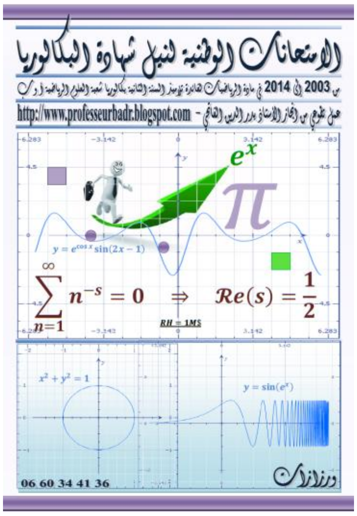
$D'où \ : \quad L = \int_0^1 \ln(1+\theta) \cdot \left(\frac{1}{1+\theta^2}\right) d\theta$

$$= \int_0^1 \frac{\ln(1+\theta)}{1+\theta^2} d\theta = J$$

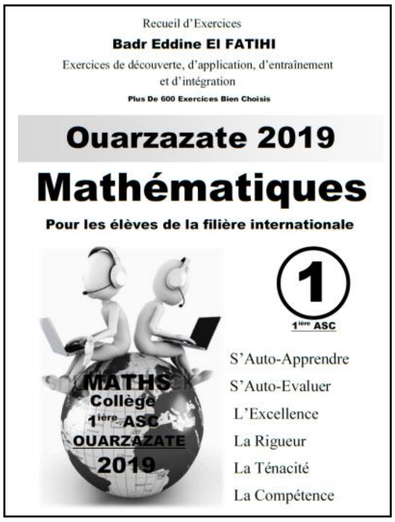
$$= \boxed{\frac{\pi \ln 2}{8}}$$

Mathématiques

Autres publications

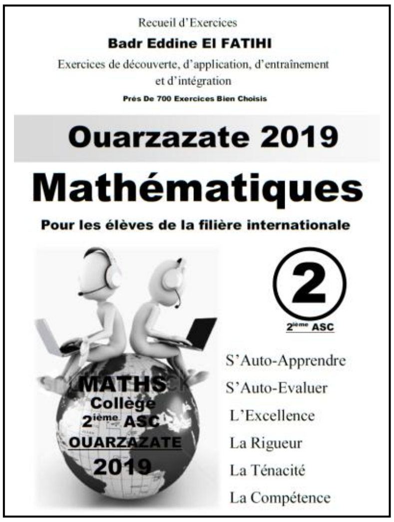


351 pages - été 2012

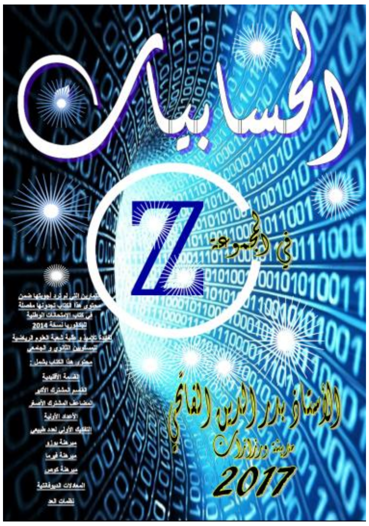


155 pages - été 2018

161 pages - été 2013



162 pages - été 2018



156 pages - été 2016

171 pages - été 2019